

Uitwerking tussentoets 26 maart 2018

1. (a) $|Tf(x)| \leq \int_a^x |f(t)| dt \leq (b-a)\|f\|$, dus $\|Tf\| \leq (b-a)\|f\|$, en zo $\|T\| \leq (b-a)$.
 Voor $f = 1$, is $\|f\| = 1$, $Tf(x) = x - a$, dus $\|Tf\| = b - a$, zodat $\|T\| \geq (b-a)$.

(b) Zij $S: Y \rightarrow X: f \mapsto f'$. $(TS)(x) = \int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(a) = f(x)$. $(ST)(x) = (\int_a^x f(t) dt)'(x) = f(x)$, dus $S = T^{-1}$.
 Neem $f_n(x) = (x-a)^n \in Y$. Dan $\|f_n\| = (b-a)^n$, en $\|Sf_n\| = n(b-a)^{n-1}$, zodat $\|S\| \geq n/(b-a)$. Omdat n willekeurig is, is S onbegrensd.
2. (a) $|f(x)| \leq \|f\|\|x\|$, dus $\sup_{0 \neq f \in X'} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \|x\|$.
 Definieer $f_x: X \rightarrow \mathbb{F}: y \mapsto \langle y, x \rangle$. Dan $|f_x(y)| \leq \|y\|\|x\|$, dus $\|f_x\| \leq \|x\|$. Nu geldt $\sup_{0 \neq f \in X'} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq \frac{|f_x(x)|}{\|f_x\|} = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} \geq \|x\|$.

(b) $\forall x \in X$ is $\|T_x\| = \sup_{0 \neq f \in X'} \frac{|T_x(f)|}{\|f\|} = \sup_{0 \neq f \in X'} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|$ dankzij (a). I.h.b. is $T_x \in X'' = B(X', \mathbb{F})$.
 Het gegeven laat zien dat voor iedere $f \in X'$, $\{\|T_x(f)\|: x \in E\}$ begrensd is. De uniform boundedness theorem geeft nu dat $\{\|T_x\|: x \in E\}$, d.w.z. $\{\|x\|: x \in E\}$, begrensd is.
3. Zie Corollary 2.17 boek.
4. Met $f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha} e^{i(\pi-x)\alpha}$ en $e_n(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{inx}$, gebruik dat $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi \alpha} = \|f\|_{L^2(0,2\pi)}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\langle f, e_n \rangle_{L^2(0,2\pi)}|^2$. Nu rekenwerk.
5. (a) Voor $x \in c_0$ geldt $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$. $A: c_0 \rightarrow \ell^\infty$ is continu, dus $Ax = \sum_{j=1}^{\infty} x_j A e_j$. Ook is $(\cdot)_i: \ell^\infty \rightarrow \mathbb{F}$ continu, dus $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} x_j (A e_j)_i$.

(b) Gegeven i , en gegeven N , definieer $x \in c_0$, door

$$x_j = \begin{cases} \frac{|a_{ij}|}{a_{ij}} & a_{ij} \neq 0, j \leq N \\ 0, & \text{elders.} \end{cases}$$

Nu $\sum_{j=1}^N |a_{ij}| = |\sum_{j=1}^N a_{ij}x_j| = |(Ax)_i| \leq \|Ax\| \|x\| = \|Ax\|$.
Zowel N als i waren willekeurig, dus $\sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \leq \|A\|$.

Anderzijds,

$$\|Ax\| = \sup_i |(Ax)_i| = \sup_i \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_j \right| \leq \|x\| \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|,$$

dus $\|A\| \leq \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$.

(c) Definieer $A: c_0 \rightarrow \ell^\infty$ door $(Ax)_i = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$. Dan A lineair, en uit $|\lim_{k \rightarrow \infty} x_k| \leq \sup_k |x_k|$ volgt $A \in B(c_0, \ell^\infty)$ met $\|A\| \leq 1$. Door voor x een niet-nul constant rijtje te nemen volgt dat $\|A\| = 1$, dus i.h.b. $A \neq 0$.

Er geldt $(Ae_j)_i = \lim_{k \rightarrow \infty} (e_j)_k = 0$, dus in het algemeen $(Ax)_i \neq \sum_{j=1}^{\infty} (Ae_j)_i x_j$.