



Tom H. Koornwinder, Jasper V. Stokman (eds.)

**Encyclopedia of Special Functions: The Askey-Bateman Project**  
**Volume II Multivariable Special Functions**

Cambridge University Press, 2020

xii + 427 p., prijs £59.99

ISBN 9781107003736

The three volume series *Higher Transcendental Functions* published in the 1950s resulted from the initiative by Harry Bateman (1882–1946) to have an extensive compilation of special functions and their properties. Bateman was a professor at California Institute of Technology, and after his death it was decided to finish his project. Arthur Erdélyi (1908–1977) was in charge of a team which eventually published the three volumes *Higher Transcendental Functions* as well as the two volume set *Tables of Integral Transforms*, collectively known as the Bateman project. Since the publication of the Bateman project enormous progress in the field of special functions has been made, and an update of the Bateman project was required. Askey gives more details on the background of the Bateman project, and the history of other handbooks (see: R. Askey, 'Handbooks of Special Functions', pp. 369–391 in *A Century of Mathematics in America, Part III*, P. Duren, ed., AMS, 1989). Since Richard Askey (1933–2019) was very influential in the developments in special functions (see: H. S. Cohl, M. E. H. Ismail, H.-H. Wu, 'The Legacy of Dick Askey (1933–2019)', *Notices AMS*, January 2022, 59–75), it was decided to name the update the Askey-Bateman project. The book under review concerns the second volume of the Askey-Bateman project, which deals with multivariable special functions. In a sense, this topic was already mentioned by Askey in his 'Handbooks of Special Functions', pp. 382–383, as one of the important developments. In the original Bateman project multivariable special functions were essentially restricted to the study of some 2-variable orthogonal polynomials and 2-variable hypergeometric functions introduced by Appell, Kampé de Fériet and Horn.

The current volume under review has contributions by many of the experts that have made fundamental contributions to the developments of multivariable special functions over the last decades or longer. Each of these chapters gives an introduction to the topic of the chapter and next explains the main results in this topic. Some of the statements are provided with proofs, but there are references to the literature as well, and each chapter has a list of pointers to the main references. For instance, the chapter by Matsumoto on Appell and Lauricella hypergeometric functions extends the information of the Bateman project. In its 22 pages, the chapter brings the reader's knowledge up to the current state of affairs, including links to (co)homology groups. All the other chapters discuss new developments that were not foreseen in the Bateman project. Some of the chapters deal with topics which are more well established than others. For instance, the chapter by Heckman and Opdam on 'their' polynomials and hypergeometric functions is very well established and so is the chapter by Dunkl on Dunkl operators, whereas the introduction of multivariable elliptic hypergeometric series is much more recent and develops very quickly. The chapter on elliptic hypergeometric series is written by

Redactie: Hans Cuypers en Hans Sterk

Review Editors NAW - MF 5.092

Faculteit Wiskunde & Informatica

Technische Universiteit Eindhoven

Postbus 513

5600 MB Eindhoven

reviews@nieuwarchief.nl

www.win.tue.nl/wgreview

Rosengren and Warnaar. The topics covered in the volume also include applications to other fields, such as Lie theory, combinatorics and mathematical physics.

Having so many authors working on one volume requires an effort to make the volume coherent and the chapters of constant quality. There are many cases known where these goals have not been achieved, a famous one being the classic Abramowitz–Stegun *Handbook of Mathematical Functions* (supposedly the mathematics all times bestseller), see also Askey's 'Handbooks of Special Functions', or even the first volume of this new Askey–Bateman project. The editors of the current volume, Tom Koornwinder and Jasper Stokman, have done a superb job in making this volume much more than just a collection of twelve chapters on multivariable special functions. Moreover, the introductory chapter by the editors gives an excellent overview of the book as a whole.

The twelve chapters contain a wealth of information, and for many topics the book gives a great introduction to various new and exciting developments in the theory of multivariable special functions. It makes this volume of the Askey–Bateman project an excellent point of departure for a study in multivariable special functions. It is a pleasure to read the chapters, and learn more about the fascinating developments in these topics. *Erik Koelink*



Marcus du Sautoy

**Thinking Better**  
**The Art of the Shortcut in Math and Life**

*Basic Books (Hachette Book Group), 2021*  
iiv + 326 p., prijs \$30.00  
ISBN 9781541600362

De bekende auteur Marcus du Sautoy (1965) is hoogleraar wiskunde in Oxford en tevens benoemd op de zogenaamde Simonyl leerstoel voor de 'Public Understanding of Science'. Een leerstoel waarvan wij er in ons land voor verschillende disciplines ook enkele hebben. We kennen hem van boeken zoals *Finding Moonshine* (in het Nederlands uitgegeven onder de titel *Het symmetrie-monster*), *The Creativity Code (De code van creativiteit)*, en diverse andere. Maar ook van zijn veelvuldige optredens op de Engelse tv. Kortom, hij beoefent een mooie mix van zuiver wiskundig werk en werk dat gericht is op 'Public Understanding'. Het boek dat nu voor mij ligt past helemaal in deze mix.

De uitgever prijst het boek aan met de woorden: "One of the world's great mathematicians shows why math is the ultimate timesaver – and how everyone can make their lives easier with a few simple shortcuts." Nu moet je altijd uitkijken met datgene wat een uitgever aanprijst, want zijn financiële uitgeversbelang zal hij moeilijk kunnen onderdrukken. We zijn dus op onze hoede.

Het woord 'shortcut' is wellicht niet bij ieder bekend. Denk in dit verband gewoon aan een sneltoets op de computer. In feite heb je dan de essentie te pakken. Du Sautoy begint met het (wellicht apocriefe) verhaal van de negenjarige Gauss, als leerling van de basisschool. De onderwijzer liet zijn leerlingen de natuurlijke getallen van 1 tot 100 optellen. Binnen enkele minuten wist de

jonge Gauss het antwoord 5050. De verbaasde onderwijzer werd geconfronteerd met Gauss' verklaring  $50 \times 101$ . Hier hebben we in feite een concretisering van een shortcut: een 'timesaver' die het leven gemakkelijker maakt.

Wat hier in het klein is verteld wordt op allerlei plaatsen door ons allen gepraktiseerd. Het construeren van formules is in feite het maken van shortcuts. Een waarschuwing is op z'n plaats zoals wij telkens weer merken. Kijk naar eenvoudige getalpatronen waarbij het vervolg verraderlijk kan zijn: 1, 2, 4, 8, 16 suggereert een vervolg van 32, maar kan net zo goed 31 zijn. Toepassingen van wiskundige patronen in de sterrenkunde, morfologieën in de natuur en dergelijke kunnen daardoor tot volkomen onjuiste conclusies leiden. En hebben dat in het verleden ook gedaan.

Shortcuts in andere gebieden? Bijvoorbeeld in de muziek? Het zal duidelijk zijn dat shortcuts tot het ontwikkelen van pianovirtuositeit ondenkbaar is. Oefenen, oefenen is daarbij het recept. Maar dat is bepaald niet het hele verhaal. Het op de juiste wijze oefenen levert eveneens een vorm van shortcut op, want op een bepaald niveau gekomen ervaart de cellist, violist, pianist, voetballer zeker dat er sprake is van een ontwikkelde shortcut. Tot dusver is dit alles nog vrij triviaal, maar het verhaal gaat verder.

Het is gebleken dat het ontwikkelen en gebruiken van een aan problemen aangepaste taal eveneens kan werken als shortcut. Problemen worden door het veranderde taalgebruik dikwijls veel doorzichtiger. Zelfs (en vooral ook in de wiskunde) is dit op veel plaatsen duidelijk. Du Sautoy werkt dit mooi uit in zijn boek. Op allerlei verschillende terreinen verschijnen onverwachte shortcuts. Voor de hand liggend zijn bijvoorbeeld geheugentrainingen. Meetkundige en geodetische problematieken liggen al minder voor de hand, maar de schrijver weet ook deze overtuigend tot leven te wekken. Ook reisproblemen en het maken van kaarten zijn niet vrij van shortcuts. Diagrammen spelen daarbij een belangrijke rol. Economie, kunst, statistiek, waarschijnlijkheidsrekening, psychotherapie, het casino, financiële problematieken, grafen en netwerken, neurowetenschappen, overal komen shortcuts te voorschijn. Het boek begint heel elementair, maar door de grote verscheidenheid raakt het boek steeds dieper wordende lagen van shortcuts aan.

Maar het is niet allemaal shortcuts wat de klok slaat. De langdurige zoektocht naar de exacte oplossing van bijvoorbeeld het handelsreizigersprobleem heeft ons de laatste tijd met de neus op de feiten gedrukt. Namelijk op de vraag of bij ieder probleem wel een shortcut mogelijk is. En hier doemt een nieuw theoretisch probleem op: bestaan er problemen die geen shortcuts toelaten? Zou dat het geval zijn met het vierkleurenprobleem en/of met het handelsreizigersprobleem? En zou het werk van Andrew Wiles ooit met een shortcut ingekort kunnen worden? Tot nu toe zijn dit onopgeloste vragen. Zelfs weten we niet hoe we dit probleem in zijn algemeenheid zouden moeten aanpakken. Du Sautoy heeft hiermee een rijk gevarieerd boek geschreven. Lees door het triviale begin heen en zie hoe hij een grote diepte probeert te vatten in dit populair bedoelde boek.

Hij sluit het boek af met een uitvoerige index die op zichzelf al een aanwijzing vormt voor de brede visie die in dit boek wordt ontwikkeld. Kortom, een populair boek waarin onnoemelijk veel voorbeelden benoemd worden, waar wiskunde op veel plaatsen een rol speelt, maar waarin geen diepe wiskunde bedreven wordt. Maar dat was ook niet de intentie van de schrijver. De intentie ligt