Additieformule voor Jacobi-polynomen[1]

door Tom Koornwinder, `thkmath@xs4all.nl`, *laatst gewijzigd 10 juni 2024*

Een *Jacobi-polynoom* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ is een orthogonaal polynoom van graad n t.o.v. de gewichtsfunctie $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ $(\alpha,\beta>-1)$ op het interval $(-1,1)$. Als $\alpha=\beta$ dan spreken we van *ultrasferische* of *Gegenbauer-polynomen.* We normaliseren $R_n^{(\alpha,\beta)}(x) := P_n^{(\alpha,\beta)}(x)/P_n^{(\alpha,\beta)}(1)$.

Zij Ω_d de eenheidssfeer in $\mathbb{R}^d$. Een *sferische harmonische* van graad n is de beperking tot Ω_d van een harmonisch homogeen polynoom van graad n in $x_1,\ldots,x_d$. Zij ω_d de rotatie-invariante maat op Ω_d zo dat de totale maat 1 is. We kunnen nu spreken van $L^2(\Omega_d)$ en we kunnen een orthonormale reële basis $\{Y_j\}_{j=1}^{N(n,d)}$ kiezen van de $N(n,d)$-dimensionale ruimte van sferische harmonischen van graad n. Dan blijkt de volgende *additieformule voor sferische harmonischen* te gelden:

$$R_n^{(\frac12(d-3),\frac12(d-3))}(\xi\cdot\eta)=\frac{1}{N(n,d)}\sum_{j=1}^{N(n,d)}Y_j(\xi)Y_j(\eta),\quad \xi,\eta\in\Omega_d, \tag{1}$$

waarbij $\xi\cdot\eta$ het inproduct in $\mathbb{R}^d$ is. Neem nu $\xi=(\cos\theta_1,\sin\theta_1\cos\phi,\sin\theta_1\sin\phi,0,\ldots,0)$ en $\eta=(\cos\theta_2,\sin\theta_2,0,\ldots,0)$. Bij geschikte keuze van de orthonormale basis geeft (1) dan de *additieformule voor ultrasferische polynomen*:

$$\begin{aligned}&R_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi)\\&\quad=\sum_{k=0}^n c_{n,k}^\alpha(\sin\theta_1)^k R_{n-k}^{(\alpha+k,\alpha+k)}(\cos\theta_1)(\sin\theta_2)^k R_{n-k}^{(\alpha+k,\alpha+k)}(\cos\theta_2)R_k^{(\alpha-\frac12,\alpha-\frac12)}(\cos\phi),\end{aligned}\tag{2}$$

waarbij in eeste instantie $\alpha=\frac12(d-3)$, maar deze restrictie kan worden opgeheven. De coëfficiënten $c_{n,k}^\alpha$ kunnen expliciet gemaakt worden. Voor $\alpha=-\frac12$ degenereert (2) tot

$$\cos(n(\theta_1\pm\theta_2))=\cos n\theta_1\cos n\theta_2\mp\sin n\theta_1\sin n\theta_2,$$

vanwaar de naam additieformule.

Voor $z\in\mathbb{C}$ is een *schijfpolynoom* $R_{m,n}^\alpha(z)$ een polynoom van graad m in z en van graad n in $\overline{z}$ dat gegeven wordt in termen van Jacobi-polynomen door

$$R_{m,n}^\alpha(re^{i\theta}):=r^{|m-n|}e^{i(m-n)\theta}R_{\min(m,n)}^{(\alpha,|m-n|)}(2r^2-1),\quad \alpha>-1.$$

Deze polynomen zijn orthogonaal op de eenheidsschijf D in $\mathbb{C}$:

$$\int_D R_{m,n}^\alpha(z)\,\overline{R_{k,\ell}^\alpha(z)}\,(1-|z|^2)^\alpha\,dx\,dy=0\quad z=x+iy,\quad (m,n)\neq(k,\ell).$$

Voor $\alpha=0$ zijn hun reële en imaginaire delen bekend als *Zernike-polynomen.* Die hebben veel toepassingen in de optica.

Bekijk nu Ω_{2d} als de eenheidssfeer in $\mathbb{C}^d$. Een *compleze sferische harmonische* van graad m,n is de beperking tot Ω_{2d} van een polynoom dat homogeen van graad m in $z_1,\ldots,z_d$ is en

[1] Dit is een verdere uitwerking van het gelijknamige kader in [1]

homogeen van graad n in $\overline{z_1},\ldots,\overline{z_d}$ en dat als polynoom in de reële en imaginaire delen van $z_1,\ldots,z_d$ harmonisch is. Kies een orthonormale complexe basis $\{Y_j\}_{j=1}^{N(m,n,d)}$ van de $N(m,n,d)$-dimensionale ruimte van complexe sferische harmonischen van graad m,n Dan blijkt de volgende *additieformule voor complexe sferische harmonischen* te gelden:

$$R_{m,n}^{d-2}(\xi\cdot\eta)=\frac{1}{N(m,n,d)}\sum_{j=1}^{N(m,n,d)} Y_j(\xi)\,\overline{Y_j(\eta)},\quad \xi,\eta\in\Omega_{2d}, \tag{3}$$

waarbij $\xi\cdot\eta$ het hermitisch inproduct in $\mathbb{C}^d$ is. Neem nu

$$\xi=(z_1,(1-|z_1|^2)^{\frac12}w,(1-|z_1|^2)^{\frac12}(1-|w|^2)^{\frac12},0,\ldots,0)\quad\text{en}\quad \eta=(z_2,(1-|z_2|^2)^{\frac12},0,\ldots,0).$$

Bij geschikte keuze van de orthonormale basis geeft (3) de *additieformule voor schijfpolynomen*:

$$\begin{aligned}&R_{m,n}^{\alpha}(z_1\overline{z_2}+(1-|z_1|^2)^{\frac12}(1-|z_2|^2)^{\frac12}w)\\&=\sum_{k=0}^{m}\sum_{\ell=0}^{n}c_{m,n;k,\ell}^{\alpha}(1-|z_1|^2)^{\frac12(k+\ell)}R_{m-k,n-\ell}^{\alpha+k+\ell}(z_1)\,\overline{(1-|z_2|^2)^{\frac12(k+\ell)}R_{m-k,n-\ell}^{\alpha+k+\ell}(z_2)}\,R_{k,\ell}^{\alpha-1}(w),\end{aligned}\tag{4}$$

waarbij in eeste instantie $\alpha=d-2$, maar deze restrictie kan worden opgeheven. De coëfficiënten $c_{m,n;k,\ell}^{\alpha}$ kunnen expliciet gemaakt worden.

Voor $m=n$, $z_1=\cos 2\theta_1$, $z_2=\cos 2\theta_2$, $w=re^{i\phi}$ wordt het linker lid van (4) als volgt:

$$R_n^{(\alpha,0)}(2\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2+2\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2+\sin 2\theta_1\sin 2\theta_2\,r\cos\psi-1), \tag{5}$$

terwijl de termen in het rechter lid ook in Jacobi-polynomen kunnen worden uitgedrukt. Door een paar manipulaties kunnen we uit de dubbelsom-ontwikkeling van (5) een soortgelijke ontwikkeling van $R_n^{(\alpha,\beta)}$ met hetzelfde argument verkrijgen. Dit is de *additieformule voor Jacobi-polynomen*.

Referenties

[1] R. Bocklandt and E. Berengoltz, *Interview met Tom Koornwinder*, Nieuw Archief voor Wiskunde (5) 25 (2024), No. 2, 81–86; `https://www.nieuwarchief.nl/serie5/pdf/naw5-2024-25-2-081.pdf`.

[2] T.H. Koornwinder, *The addition formula for Jacobi polynomials I. Summary of results*, Indag. Math. 34 (1972), 188–191; `http://dx.doi.org/10.1016/1385-7258(72)90011-X`.

[3] T.H. Koornwinder, *The addition formula for Jacobi polynomials II. The Laplace type integral and the product formula*, Report TW 133/72. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1972; `https://ir.cwi.nl/pub/7722`.

[4] T.H. Koornwinder, *The addition formula for Jacobi polynomials III. Completion of the proof*, Report TW 135/72. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1972; `https://ir.cwi.nl/pub/12598`.