H Hilbertruimte, $y \in H$

Stelling Zij $X \subset H$, gesloten, convex.

Dan $\exists!\, x \in X$: $d(y, X) = d(y, x)$

Stelling Zij $X \subset H$, gesloten, lineair.

Dan:

1. $\exists!\, x \in X$: $d(y, X) = d(y, x)$
2. $\forall x \in X$:

   $d(y, X) = d(y, x) \iff y - x \perp X$
3. $\exists!\, x \in X$: $y - x \perp X$

H Hilbertruimte, $E \subset H$

Def. $E^{\perp} := \{ z \in H \mid \forall x \in E : \langle z, x \rangle = 0 \}$
(orthoplement van E)

Stelling

1. $E^{\perp}$ is gesloten lineaire deelruimte
2. $(E^{\perp})^{\perp}$ is gesloten lineaire deelruimte en $E \subset (E^{\perp})^{\perp}$
3. $E = (E^{\perp})^{\perp} \iff$ E is gesloten lineaire deelruimte

H Hilbertruimte

$X \subset H$ gesloten, lineair

Def. $P_X : H \to H$ zo dat, als $y \in H$ dan is $P_X y$ de unieke $x \in X$ zo dat $y - x \in X^\perp$.

(orthogonale projectie van H op X)

Stelling

1. P_X is lineair
2. $P_X(H) = X$
3. $P_X|_X = I_X$, $P_X|_{X^\perp} = 0_{X^\perp}$
4. $P_X \circ P_X = P_X$ (idempotent)
5. $I = P_X + P_{X^\perp}$
6. $P_X P_{X^\perp} = 0 = P_{X^\perp} P_X$

H Hilbertruimte

Def. $H = X \oplus Y$

(orthogonale directe som)

betekent :

(a) X en Y zijn gesloten lineaire deelruimtes van H,

(b) $X \perp Y$,

(c) $\forall z \in H$ $\exists$ unieke $x \in X$ en $y \in Y$ zo dat $z = x + y$.

Opmerking (c) $\Longleftrightarrow$ (c)' met :

(c)' $X \cap Y = \{0\}$, $X + Y = H$

H Hilbertruimte

$E = \{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ orthonormaal stelsel

$x \in H$, $X := \overline{\mathrm{Span}(E)}$.

Stelling

1. $\langle x, e_\alpha \rangle \neq 0$ voor slechts aftelbaar veel $\alpha \in A$

2. $$\sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha := \sum_{\substack{\alpha \in A \\ \langle x, e_\alpha \rangle \neq 0}} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha$$

$= P_X x$, convergeert onvoorwaardelijk.

3. $$\|P_X x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2 :=$$

$$\sum_{\substack{\alpha \in A \\ \langle x, e_\alpha \rangle \neq 0}} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2 \begin{cases} \leq \|x\|^2 \\ < \infty \end{cases}$$

4. $$\sum_{\alpha \in A} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha = x \iff$$

$$\sum_{\alpha \in A} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2 = \|x\|^2 \iff$$

$$x \in \overline{\mathrm{Span}(E)}$$