Uitwerking van een aantal opgaven in syllabus Functionaalanalyse, versie 2005

door T. H. Koornwinder, `thk@science.uva.nl`

laatst gewijzigd: 28 november 2005

Opgave 3.2 Laat H de completering van de ruimte van eenmaal continu differentieerbare functies $C^1([-1,1])$ zijn onder het inproduct

$$\langle f,g\rangle := \int_{-1}^{1} (f\,\overline{g} + f'\,\overline{g'})\,dx.$$

Laat zien dat voor een rij $\{f_j\}$ in $C^1([-1,1])$ het Cauchy zijn in H impliceert dat de rij $\{f_j\}$ uniform op $[-1,1]$ convergeert. Concludeer dat elementen van H door continue functies kunnen worden voorgesteld. Laat zien dat $f \mapsto f(0)$ een CLF op H is en (moeilijker*) bepaal $g \in H$ die deze functionaal representeert.

Uitwerking Voor $f \in C^1([-1,1])$ geldt:

$$\|f\|^2 := \langle f,f\rangle = \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2,$$

$$f(1) - f(x) = \int_x^1 f'(y)\,dy,$$

$$|f(x) - f(1)| \le \int_x^1 |f'(y)|\,dy \le \int_{-1}^1 |f'(y)|\,dy \le \sqrt{2}\,\|f'\|_2,$$

$$\|f - f(1)\|_\infty \le \sqrt{2}\,\|f'\|_2,$$

$$\|f - f(1)\|_2 = \Big(\int_{-1}^1 |f(x) - f(1)|^2\,dx\Big)^{\frac12} \le \sqrt{2}\,\|f - f(1)\|_\infty \le 2\,\|f'\|_2,$$

$$\|f(1)\|_2 \le \|f(1) - f\|_2 + \|f\|_2 \le \|f\|_2 + 2\|f'\|_2,$$

$$\|f(1)\|_\infty = 2^{-\frac12}\,\|f(1)\|_2 \le 2^{-\frac12}\,\|f\|_2 + 2^{\frac12}\,\|f'\|_2,$$

$$\|f\|_\infty \le \|f - f(1)\|_\infty + \|f(1)\|_\infty \le 2^{-\frac12}\,\|f\|_2 + 2^{\frac32}\,\|f'\|_2 \le \big(\tfrac{17}{2}\big)^{\frac12}\,\big(\|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2\big)^{\frac12} \le 3\|f\|,$$

$$\text{dus } \|f\|_\infty \le 3\|f\|.$$

Dus als $\lim_{m,n\to\infty} \|f_m - f_n\| = 0$ dan $\lim_{m,n\to\infty} \|f_m - f_n\|_\infty = 0$, dus dan is er een unieke $f \in C([-1,1])$ met $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$, dus $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0$. Ook zal dan $\lim_{m,n\to\infty} \|f_m' - f_n'\|_2 = 0$, dus er is een unieke $g \in L^2([-1,1])$ met $\lim_{n\to\infty} \|g - f_n'\|_2 = 0$. Dan

$$\Big|\int_x^1 g(y)\,dy - \int_x^1 f_n'(y)\,dy\Big| \le 2^{\frac12}\,\|g - f_n'\|_2 \ \to 0 \quad \text{als } n \to \infty.$$

Dus

$$f(1) - f(x) = \lim_{n\to\infty} \big(f_n(1) - f_n(x)\big) = \lim_{n\to\infty} \int_x^1 f_n'(y)\,dy = \int_x^1 g(y)\,dy.$$

Dus dan geldt $f'(x) = g(x)$ bijna overal.

Laat nu V de ruimte zijn van alle $f \in C([-1,1])$ zo dat $f'(x)$ bestaat voor bijna alle x en $f' \in L^2([-1,1])$ en $f(1) - f(x) = \int_x^1 f'(y)\,dy$, en neem op V het inproduct

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} (f\,\overline{g} + f'\,\overline{g'})\,dx.$$

met bijbehorende norm

$$\|f\|^2 := \langle f, f \rangle = \|f\|_2^2 + \|f'\|_2^2.$$

We hebben het volgende bewezen. Als $\{f_n\}$ een fundamentaalrij is in V met $f_n \in C^1([-1,1])$ voor alle n, dan convergeert f_n uniform naar een $f \in V$, en dan geldt ook dat $f_n' \to f'$ in $L^2([-1,1])$ en $f_n \to f$ t.o.v. de norm op V.

We kunnen in dit bewijs de conditie laten vallen dat f_n continu differentieerbaar is. Het bewijs blijft gewoon doorgaan en we concluderen dat V een volledige inproductruimte, dus een Hilbertruimte is.

Ook blijft voor $f \in H$ gelden dat $\|f\|_\infty \le 3\|f\|$, dus i.h.b. $|f(0)| \le 3\|f\|$, dus $f \mapsto f(0)$ is een CLF op H. Dus er volgt uit Stelling 3.6 (Riesz) dat er een $g \in H$ is zo dat $f(0) = \langle f, g \rangle$ voor alle $f \in H$. Laat $h(x) := \overline{g(x)}$. We zoeken naar een $h \in H$ zo dat de beperking h_+ van h tot $[0,1]$ en de beperking h_- van h tot $[-1,0]$ allebei C^2-functies zijn, maar dat mogelijk $h_+'(0) \ne h_-'(0)$.

Er moet voor alle $f \in H$ gelden dat

$$\begin{aligned}
f(0) &= \int_0^1 f(x)\,h_+(x)\,dx + \int_{-1}^0 f(x)\,h_-(x)\,dx + \int_0^1 f'(x)\,h_+'(x)\,dx + \int_{-1}^0 f'(x)\,h_-'(x)\,dx \\
&= f(0)\big(h_-'(0) - h_+'(0)\big) + f(1)h_+'(1) - f(-1)h_-'(-1) \\
&\qquad + \int_0^1 f(x)\big(h_+(x) - h_+''(x)\big)\,dx + \int_{-1}^0 f(x)\big(h_-(x) - h_-''(x)\big)\,dx
\end{aligned}$$

Hier zal aan voldaan zijn als h_+ en h_- voldoen aan

$$\begin{aligned}
&h_+(x) - h_+''(x) = 0, \quad h_+'(1) = 0, \\
&h_-(x) - h_-''(x) = 0, \quad h_-'(-1) = 0, \\
&h_+(0) = h_-(0), \quad h_-'(0) - h_+'(0) = 1.
\end{aligned}$$

De twee differentiaalvergelijkingen geven

$$h_+(x) = A\cosh x + B\sinh x, \quad h_-(x) = C\cosh x + D\sinh x,$$

met A, B, C, D nog te bepalen. De vier nevencondities geven: $A = C$, $D - B = 1$, $A\sinh 1 + B\cosh 1 = 0$, $-C\sinh 1 + D\cosh 1 = 0$. De unieke oplossing is:

$$A = C = \frac{e^2+1}{2(e^2-1)}, \qquad D = -B = \tfrac{1}{2}.$$

Opgave 4.13 Bewijs dat de gesloten eenheidsbal in een oneindig-dimensionale genormeerde vectorruimte X niet compact is, door een rij in $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ in X te construeren met $\|a_n\| = 1$ en met de afstand van a_n tot $\operatorname{Span}(a_1, \ldots, a_{n-1})$ gelijk 1. Concludeer dat de identiteitsoperator op een oneindig-dimensionale genormeerde vectorruimte geen compacte operator is.

Uitwerking We bewijzen met inductie naar n dat er eenheidsvectoren $a_1, \ldots, a_n$ in X bestaan zo dat de afstand van a_i tot $\mathrm{Span}(a_1, \ldots, a_{i-1})$ gelijk aan 1 is ($i = 2, \ldots, n$). Voor de beginstap $n = 1$ kiezen we een eenheidsvector a_1 in X (zo'n eenheidsvector bestaat, want X is oneindig-dimensionaal). Neem nu de inductiehypothese aan voor het geval n. Schrijf $V_n := \mathrm{Span}(a_1, \ldots, a_n)$ en neem een vector $b \in X \backslash V_n$. Deze bestaat omdat X oneindig-dimensionaal is. Volgens Gevolg 4 na Definitie 1.5 is er een $c \in V_n$ zo dat $d(b, c) = d(b, V_n)$. Dus b heeft afstand $\|b - c\|$ tot V_n. Dus $a_{n+1} := (b - c)/\|b - c\|$ heeft afstand 1 tot V_n. Hiermee is de inductiestap bewezen, dus het bewijs met inductie is voltooid.

De vectoren a_n hebben dus onderlinge afstand ≥ 1. De gesloten eenheidsbal in X kan niet compact zijn, want anders zou de begrensde rij $a_1, a_2, \ldots$ een convergente deelrij hebben, dus een Cauchy-deelrij, maar vectoren met onderlinge afstand ≥ 1 kunnen nooit een Cauchy-rij vormen.

De identiteitsoperator op X kan niet compact zijn, want anders zou het beeld van de gesloten eenheidsbal in X compacte afsluiting hebben. Maar dit beeld is de gesloten eenheidsbal zelf, en zijn afsluiting is weer de gesloten eenheidsbal, en die is niet compact.

Opgave 4.16 Geef een voorbeeld van een BLO $L \colon H \to H$ (H een separabele oneindig-dimensionale Hilbertruimte) zo dat het supremum in $\|L\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Lx\|$ niet wordt aangenomen (ook al is de verzameling $\{Lx \mid \|x\| \leq 1\}$ gesloten).

Uitwerking Neem $H := L^2([0,1])$ en $(Lf)(x) := x\, f(x)$. Het is duidelijk dat $\|Lf\|_2 \leq \|f\|_2$, dus $\|L\| \leq 1$. Ook geldt voor $f := \chi_{[1-n^{-1},1]}$ (karakteristieke functie) dat $\|Lf\|_2 \geq (1 - n^{-1})\|f\|_2$. Dus $\|L\| = 1$. Stel nu dat $f \in H$ met $\|Lf\| = \|f\|$. Dan $\int_0^1 x^2\, |f(x)|^2\, dx = \int_0^1 |f(x)|^2\, dx$, dus $\int_0^1 (1 - x^2)\, |f(x)|^2\, dx = 0$, dus $(1 - x^2)\, |f(x)|^2 = 0$ bijna overal, dus $f(x) = 0$ bijna overal, dus $f = 0$.

Opgave 5.4 Laat zien dat de continu differentieerbare functies een dichte deelverzameling van de eerste categorie vormen in $C([0,1])$ met de uniforme norm. Kun je ook een "direct" bewijs geven?

Uitwerking Zij $X := C([0,1]) \times \mathbb{K} = \{(f, \lambda) : f \in C([0,1]),\ \lambda \in \mathbb{K}\}$. Met norm $\|(f, \lambda)\| := \|f\|_\infty + |\lambda|$ is dit een Banach-ruimte. De afbeelding $L \colon X \to C([0,1])$ gegeven door $(L(f, \lambda))(x) := \lambda + \int_0^x f(y)\, dy$ is een BLO met beeldruimte $C^1([0,1])$. De BLO L van de Banachruimte X naar $C([0,1])$ is dus niet surjectief. Volgens Stelling 5.6 (van de open afbeelding), zou L surjectief zijn als zijn beeld van de tweede categorie was. Dus het beeld moet van de eerste categorie zijn.

Nu een direct bewijs. Zij $A_n := \{f \in C^1([0,1]) : \forall x, y \in [0,1]\ |f(x) - f(y)| \leq n\, |x - y|\}$ ($n \in \mathbb{Z}_{>0}$). Als $f \in C^1([0,1])$ dan geldt met de middelwaardestelling voor alle $x, y \in [0,1]$ de ongelijkheid $|f(x) - f(y)| \leq \|f'\|_\infty\, |x - y|$, dus $f \in A_n$ voor zekere n. Elke f die ligt in de afsluiting B_n van A_n in $C([0,1])$ moet dan ook voldoen aan $|f(x) - f(y)| \leq n\, |x - y|$ voor alle x, y, want als $\lim_{j\to\infty} \|f - f_j\|_\infty = 0$ met $f_j \in A_n$ en $f \in C([0,1])$, dan geldt voor alle $x, y \in [0,1]$ dat $|f_j(x) - f_j(y)| \leq n\, |x - y|$ voor alle j, dus ook $|f(x) - f(y)| \leq n\, |x - y|$. De verzameling B_n heeft leeg inwendige, want stel dat er een $f \in B_n$ is en een $\delta > 0$ zo dat, als $g \in C([0,1])$ en $\|g - f\|_\infty < \delta$, dan $g \in B_n$. Neem $g(x) := f(x) + \frac{1}{2}\delta \sin(mx)$ $(x \in [0,1])$ met $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ nog nader te bepalen. Dan $g \in C([0,1])$ en $\|g - f\|_\infty < \delta$, maar $|g(x) - g(0)| \geq \frac{1}{2}\delta \sin(mx) - |f(x) - f(0)| \geq \frac{1}{2}\delta \sin(mx) - nx$. Neem $x := \pi/(2m)$. Dan $|g(x) - g(0)| \geq \frac{1}{2}\delta - n\pi/(2m) = (m\delta/\pi - n)x$. Neem $m > 2n\pi/\delta$. Dan $|g(x) - g(0)| > nx$, in tegenspraak met het feit dat $g \in B_n$.

We hebben dus $C^1([0,1])$ geschreven als aftelbare vereninging van deelverzamelingen waarvan de afsluiting in $C([0,1])$ leeg inwendige heeft. Dus $C^1([0,1])$ is van de eerste categorie in $C([0,1])$.

Opgave 5.5 Laat D_n de n-de Dirichletkern geëvalueerd in 0 zijn, beschouwd als begrensde lineaire functionaal op $\{f \in C([-\pi,\pi]) : f(-\pi) = f(\pi)\}$ met sup-norm. Laat zien dat de normen van D_n onbegrensd zijn. Leid hieruit af dat er 2π-periodieke continue functies bestaan met een Fourierreeks die niet convergeert voor $x = 0$.

Uitwerking Schrijf $C_{2\pi} := \{f \in C([-\pi,\pi]) : f(-\pi) = f(\pi)\}$. Met de sup-norm is dit een Banachruimte. Een functie $f \in C_{2\pi}$ heeft Fourier-coëfficiënten

$$\widehat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt.$$

Dan is

$$(S_n[f])(x) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\, e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(x-t)\, dt \quad \text{met} \quad D_n(x) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)}.$$

We kunnen afschatten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{1}{2}x)} \right| dx &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})x)|}{x}\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{|\sin y|}{y}\, dy \\ &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1+\frac{1}{6}\pi}^{k-\frac{1}{6}\pi} \frac{|\sin y|}{y}\, dy \geq \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \tfrac{2}{3} \log n + O(1) \quad \text{als } n \to \infty. \end{aligned}$$

Definieer

$$\phi_n(f) := (S_n[f])(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, D_n(x)\, dx.$$

Dan is ϕ_n een begrensde lineaire functionaal op $C_{2\pi}$ met

$$\|\phi_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx.$$

Dus $\lim_{n\to\infty} \|\phi_n\| = \infty$. Vanwege Stelling 5.5 (Banach-Steinhaus) moet er dan een $f \in C_{2\pi}$ zijn zo dat de rij $\{\phi_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ niet begrensd is. Dus dan kan deze rij niet convergeren, dus de Fourier-reeks van deze f kan niet convergeren voor $x = 0$.

Opgave 8.5 Zij X een (noodzakelijk niet-reflexieve) Banachruimte met een $f \in X^* \backslash \{0\}$ zo dat het beeld $f(B)$ van de gesloten eenheidsbal B in X niet gesloten is in $\mathbb{K}$. Laat zien dat dan $f(B) = \{z \in \mathbb{K} : |z| < \|f\|\}$. Geef dan ook een zwak open overdekking van

B zonder eindige deeloverdekking, wat nog eens laat zien dat in dat geval B niet zwak compact is.

Uitwerking Als $z \in f(B)$ dan $z = f(x)$ voor een $x \in B$, dus dan geldt voor elke $w \in \mathbb{K}$ met $|w| \le 1$ dat $wx \in B$, dus $wz \in f(B)$. Daarom moet $f(B)$ van de vorm $\{x \in \mathbb{K} : |z| \le r\}$ of $\{x \in \mathbb{K} : |z| < r\}$ zijn, in beide gevallen met $r = \|f\|$. Als $f(B)$ niet gesloten is in K dan moet het tweede alternatief gelden. Dan is ook noodzakelijk $f \neq 0$.

Als $f(B) = \{z \in \mathbb{K} : |z| < \|f\|\}$ dan vormen de verzamelingen $V_n := \{x \in B : |f(x)| < (1 - n^{-1}) \|f\|\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ een zwak open overdekking van B zonder eindige deeloverdekking.

Opgave 7.5 Geef een voorbeeld van een continue lineaire functionaal ϕ op $C([0,1])$ (reëelwaardig) t.o.v. de sup-norm (een niet-reflexieve Banach-ruimte) zo dat het beeld onder ϕ van de gesloten eenheidsbal in $C([0,1])$ niet gesloten is in $\mathbb{R}$.

Uitwerking Definieer $g \in L^1([0,1])$ door $g(x) := 1$ als $\frac{1}{2n} \le x < \frac{1}{2n-1}$ en $g(x) := -1$ als $\frac{1}{2n+1} \le x < \frac{1}{2n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Laat $\phi(f) := \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx \quad (f \in C([0,1]))$. Dan is ϕ een begrensde lineaire functionaal op $C([0,1])$ met $\|\phi\| = \int_0^1 |g(x)|\, dx = 1$. Er is echter geen $f \in C([0,1])$ met $\|f\|_\infty \le 1$ en $\phi(f) = 1$, want dan zou $\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx = 1$ terwijl de integrand overal in absolute waarde ≤ 1 is, dus dan zou $f(x)\, g(x) = 1$ bijna overal, dus dan zou $f(x) = g(x)$ bijna overal, wat in tegenspraak is met de continuïteit van f. Dus (zie Opgave 8.5) $\{\phi(f) : \|f\|_\infty \le 1\} = (-1, 1)$, wat niet open is in $\mathbb{R}$.

Opgave 8.6 Geef een $f \in X^*$ en een open overdekking van B met eigenschappen als in Opgave 8.5 meer expliciet als X een van de volgende Banachruimten is met $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

(a) $X = C([0,1])$ (zie Opgave 7.5);

(b) $X = c_0$;

(c) $X = \{x \in l^\infty : \lim_{n\to\infty} x_n \text{ bestaat}\}$.

Uitwerking

(a) Neem g als in Opgave 7.5 en neem
$V_n := \{f \in C([0,1]) : \|f\|_\infty \le 1,\ \left|\int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx\right| < 1 - n^{-1}\}$.

(b) Laat $f(x) := \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} x_k$ $(x \in c_0)$. Dan $|f(x)| \le \|x\|_\infty \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} = \|x\|_\infty$, dus f is een begrensde lineaire functionaal op c_0 met $\|f\| \le 1$. In feite is $\|f\| = 1$, want als $x = (x_i)$ met $x_i = 1$ als $i = 1, \ldots, n$ en $x_i = 0$ als $i > n$, dan $\|x\|_\infty = 1$ en $f(x) = \sum_{k=1}^n 2^{-k}$, dus $\sup\{|f(x)| : x \in c_0 \text{ en } \|x\|_\infty \le 1\} = 1$. Er is geen $x \in c_0$ met $\|x\|_\infty \le 1$ en $f(x) = 1$, want voor zo'n x zouden we hebben $\sum_{k=1}^\infty 2^{-k} x_k = 1$, wat alleen mogelijk is als alle termen gelijk aan 2^{-k} zijn, dus als $x_k = 1$ voor alle k, maar dan zit x niet in c_0.
Neem nu voor de open overdekking zonder eindige deeloverdekking
$V_n := \{x \in c_0 : \|x\|_\infty \le 1 \text{ en } \left|\sum_{k=1}^\infty 2^{-k} x_k\right| < 1 - n^{-1}\}$.

(c) Laat $f(x) := \sum_{k=1}^\infty (-1)^k 2^{-k} x_k$ $(x \in X)$. Dan $|f(x)| \le \|x\|_\infty \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} = \|x\|_\infty$, dus f is een begrensde lineaire functionaal op X met $\|f\| \le 1$. In feite is $\|f\| = 1$, want als $x = (x_i)$ met $x_i = (-1)^i$ als $i = 1, \ldots, n$ en $x_i = 0$ als $i > n$, dan $\|x\|_\infty = 1$ en

$f(x) = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$, dus $\sup\{|f(x)| : x \in X \text{ en } \|x\|_\infty \le 1\} = 1$. Er is geen $x \in X$ met $\|x\|_\infty \le 1$ en $f(x) = 1$, want voor zo'n x zouden we hebben $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}(-1)^k x_k = 1$, wat alleen mogelijk is als alle termen gelijk aan 2^{-k} zijn, dus als $x_k = (-1)^k$ voor alle k, maar dan bestaat $\lim_{k\to\infty} x_k$ niet, dus $x \notin X$.
Neem nu voor de open overdekking zonder eindige deeloverdekking
$V_n := \{x \in X : \|x\|_\infty \le 1 \text{ en } \left|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2^{-k} x_k\right| < 1 - n^{-1}\}$.

Opgave 9.6 Laat $L : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$, $(Lf)(x) = xf(x)$. Laat zien dat L zelfgeadjungeerd is. Wat is de norm? Is L compact? Heeft L eigenwaarden? Is L surjectief, wat kun je zeggen over $R(L)$?

Uitwerking Ga zelf na dat L een zelfgeadjungeerde BLO is met $\|L\| \le 1$. In feite is $\|L\| = 1$, want $\|L\chi_{[1-2^{-n},1]}\|_2 \ge (1 - 2^{-n})\|\chi_{[1-2^{-n},1]}\|_2$.
L is niet compact, want neem de begrensde rij van functies $f_n := 2^{\frac{1}{2}n}\chi_{[1-2^{-n+1},1-2^{-n})}$ in $L^2([0,1])$. Dan geldt, als $m > n$, dat $\|Lf_n - Lf_m\|_2 \ge 2(1 - 2^{-n+1})$ dus de rij (Lf_n) heeft geen convergente deelrij.
Stel dat L een (noodzakelijk reële) eigenwaarde λ heeft. Dan is er een $f \neq 0$ in $L^2([0,1])$ met $Lf = \lambda f$. Dus $(x - \lambda)f(x) = 0$ bijna overal. Dus $f(x) = 0$ bijna overal, wat in tegenspraak is met $f \neq 0$. Dus L heeft geen eigenwaarden.
L is niet surjectief, want als er een $f \in L^2([0,1])$ zou zijn met $(Lf)(x) = 1$ bijna overal, dan $f(x) = x^{-1}$ bijna overal, maar deze functie is niet kwadratisch integreerbaar.
$R(L)$ betaat uit alle meetbare functies f op $[0,1]$ zo dat $\int_0^1 |f(x)|^2 x^{-2}\,dx < \infty$.

Opgave 9.8 Kan een compacte operator een inverse hebben?

Uitwerking Zij $L\colon X \to Y$ een compacte operator met een inverse M. Zij B de gesloten eenheidsbal in X. Dan heeft $L(B)$ compacte afsluiting $\overline{L(B)}$ in Y, dus is $M(\overline{L(B)})$ een compacte verzameling in X die B als gesloten deelverzameling bevat. Dus B is compact. Volgens Opgave 4.13 kan X dan niet oneindig-dimensionaal zijn. Een compacte operator $L\colon X \to Y$ kan een inverse hebben desda X eindig-dimensionaal is en L bijectief.

Opgave 10.6 Zij $L : H \to H$ een zelfgeadjungeerde lineaire operator op een Hilbertuimte H. Bewijs: als L^2 compact dan L compact. Is dit ook waar zonder zelfgeadjungeerdheid van L?

Uitwerking Zij $\{x_n\}$ een rij in de gesloten eenheidsbal van H. Omdat L^2 compact is, is er dan een deelrij $\{x_{n_k}\}$ zo dat de rij $\{L^2 x_{n_k}\}$ convergeert in H. Dus die rij is een Cauchyrij in H. Dus bij elke $\varepsilon > 0$ is er een k_0 zo dat $\|L^2(x_{n_k} - x_{n_l})\| < \varepsilon$ als $k, l \ge k_0$. Dus wegens zelfgeadjungeerdheid van L:

$$\begin{aligned}|\langle L(x_{n_k} - x_{n_l}), L(x_{n_k} - x_{n_l})\rangle| &= |\langle L^2(x_{n_k} - x_{n_l}), x_{n_k} - x_{n_l}\rangle| \\ &\le \|L^2(x_{n_k} - x_{n_l})\|\,\|x_{n_k} - x_{n_l}\| \le 2\|L^2(x_{n_k} - x_{n_l})\| < 2\varepsilon\end{aligned}$$

als $k, l \ge k_0$. Dus de rij $\{Lx_{n_k}\}$ is Cauchyrij, dus convergent. Dus L is compact. □

Hier is een tegenvoorbeeld als L niet zelfgeadjungeerd is. Neem $H = l^2$ met standaardbasis $e_1, e_2, \ldots$. Definieer L door $Le_{2i-1} = e_{2i}$ als i oneven is en $Le_{2i} = 0$. Dan $L^2 = 0$, dus compact, maar L is niet compact, want de begrensde rij $\{e_{2i-1}\}$ wordt door L afgebeeld op de rij $\{e_{2i}\}$, die geen convergente deelrij heeft.

Opgave 11.1 Laat L een positieve compacte operator zijn op een Hilbertruimte H. De eigenwaarden zijn in afnemende grootte: $\lambda_0, \lambda_1, \ldots$. Bewijs dat

$$\lambda_1 = \min_{V_1} \max_{\substack{x \perp V_1 \\ x \in S}} \langle Lx, x \rangle,$$

waarbij V_1 loopt over alle 1-dimensionale deelruimten van H. Bewijs meer algemeen dat

$$\lambda_j = \min_{V_j} \max_{\substack{x \perp V_j \\ x \in S}} \langle Lx, x \rangle,$$

waarbij V_j loopt over alle j-dimensionale deelruimten van H.

Uitwerking Voor $j = 0$ wordt de te bewijzen formule $\lambda_0 = \max_{x \in S} \langle Lx, x \rangle$. Deze formule volgt dan uit Stelling 10.6.
Neem voor het geval van algemene j een orthonormaal stelsel $\{f_0, f_1, \ldots\}$ van eigenvectoren van L zo dat $Lf_j = \lambda_j f_j$. Schrijf $W_j := \text{Span}\{f_0, f_1, \ldots, f_j\}$, dus W_j heeft dimensie $j + 1$. Zij P_j de orthogonale projectie van H op W_j. Als V_j een j-dimensionale deelruimte van H is dan zal $P_j(V_j)$ dimensie $\leq j$ hebben, dus $P_j(V_j)^\perp \cap W_j \cap S \neq \emptyset$. Dus

$$\max_{\substack{x \perp V_j \\ x \in S}} \langle Lx, x \rangle \geq \max_{\substack{x \perp P_j(V_j) \\ x \in W_j \cap S}} \langle Lx, x \rangle = \max_{\substack{x \perp P_j(V_j) \\ x \in W_j \cap S}} \sum_{i=0}^{j} \lambda_i |\langle x, e_i \rangle|^2 \geq \max_{\substack{x \perp P_j(V_j) \\ x \in W_j \cap S}} \lambda_j \sum_{i=0}^{j} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \lambda_j.$$

Anderzijds

$$\lambda_j = \langle Lf_j, f_j \rangle \leq \max_{\substack{x \perp W_{j-1} \\ x \in S}} \langle Lx, x \rangle = \max_{x \in S} \sum_{i \geq j} \lambda_i |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \max_{x \in S} \lambda_j | \sum_{i \geq j} \langle x, e_i \rangle|^2 = \lambda_j.$$

Dus voor $V_j = W_{j-1}$ wordt een minimum λ_j van $\max_{\substack{x \perp V_j \\ x \in S}} \langle Lx, x \rangle$ aangenomen.

Opgave 11.2 Gebruik Opgave 11.1 om te bewijzen:

(a) Als $L_1 \geq L_2$ positieve compacte operatoren zijn, met eigenwaarden in afnemende grootte $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, resp. $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$. Dan geldt voor alle j dat $\lambda_j \geq \mu_j$.

(b) Indien nu $\|L_1 - L_2\| < \epsilon$, dan ook $\lambda_j - \mu_j < \epsilon$.

Uitwerking Omdat $L_1 \geq L_2$ zal $\langle L_1 x, x \rangle \geq \langle L_2 x, x \rangle$ voor alle $x \in S$. Dus voor alle j-dimensionale deelruimtes V_j van H zal gelden dat $\max_{\substack{x \perp V_j \\ x \in S}} \langle L_1 x, x \rangle \geq \max_{\substack{x \perp V_j \\ x \in S}} \langle L_2 x, x \rangle$. Dus

$$\lambda_j = \min_{V_j} \max_{\substack{x \perp V_j \\ x \in S}} \langle L_1 x, x \rangle \geq \min_{V_j} \max_{\substack{x \perp V_j \\ x \in S}} \langle L_2 x, x \rangle = \mu_j.$$

Als $\|L_1 - L_2\| < \varepsilon$ dan is er een $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon)$ zo dat $\|L_1 - L_2\| \leq \varepsilon_1$. Omdat $L_1 - L_2$ een positieve zelfgeadjungeerde operator is, zal dan $\max_{x \in S} \langle (L_1 - L_2)x, x \rangle = \|L_1 - L_2\| \leq \varepsilon_1$. Dus voor alle $x \in S$ zal gelden dat $\langle L_1 x, x \rangle \leq \langle L_2 x, x \rangle + \varepsilon_1$. Dus

$$\lambda_j = \min_{V_j} \max_{\substack{x \perp V_j \\ x \in S}} \langle L_1 x, x \rangle \leq \min_{V_j} \max_{\substack{x \perp V_j \\ x \in S}} \langle L_2 x, x \rangle + \varepsilon_1 = \mu_j + \varepsilon_1 < \mu_j + \varepsilon.$$

Opgave 12.2 Beschouw de Sturm-Liouville operator $Lu = -u''$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$. Bepaal de Green-functie en de eigenparen. Idem voor $Lu = -u''$, $u(0) = 0$, $u(1) = 2u'(1)$ en voor $Lu = -u''$, $u(0) = 0$, $u'(1) = 0$.

Uitwerking Hier bespreken we alleen het eerste geval. We zijn in de situatie van Definitie 12.1 met $p(x) = 1$ en $q(x) = 0$. Een oplossing van $Lu = 0$ met randvoorwaarde $u(0) = 0$ is bijv. $f_1(x) := x$. Een oplossing van $Lu = 0$ met randvoorwaarde $u(1) = 0$ is bijv. $f_2(x) := 1 - x$. Dan zijn f_1 en f_2 lineair onafhankelijk. We kunnen dus de algemene theorie van hoofdstuk 12 toepassen. We vinden dat $C := f_2 f_1' - f_1 f_2' = 1$. Dus de Green-functie is $G(x, y) = x(1 - y)$ als $x < y$ en $G(x, y) = y(1 - x)$ als $x > y$. Laat $D(L)$ de ruimte zijn van alle $u \in C^1([0, 1])$ met u' bijna overal differentieerbaar en $u'' \in L^2([0, 1])$ en $u'(x) - u'(0) = \int_0^x u''(y)\, dy$ en met $u(0) = u(1) = 0$. Dan heeft de operator $L\colon D(L) \to L^2([0, 1])$ als inverse de compacte zelfgeadjungeerde operator T op $L^2([0, 1])$ gegeven door

$$(Tf)(x) := (1 - x) \int_0^x y\, f(y)\, dy + x \int_x^1 (1 - y)\, f(y)\, dy.$$

De operator L met randvoorwaarden heeft als eigenparen de functies $\sin(\pi n x)$ met eigenwaarden $\pi^2 n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Dus T heeft als eigenparen deze zelfde functies met eigenwaarden $\pi^{-2} n^{-2}$. Inderdaad kan nog eens met een elementaire berekening gevwerifieerd worden dat de functie $\sin(\pi n x)$ een eigenfunctie is van T met eigenwaarde $\pi^{-2} n^{-2}$.