FNWI, UvA, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam

Tentamen **Integratietheorie**, 21 december 2007, 9.00–12.00 uur

Motiveer al je antwoorden. De vier sommen tellen even zwaar.

1. Zij $X = [0,1]$, $\mathcal{A}$ de collectie deelverzamelingen A van X zo dat A aftelbaar is of $X \backslash A$ aftelbaar is. Zij λ de Lebesgue-maat op $[0,1]$ en μ de beperking van λ tot $\mathcal{A}$, dus $\mu(A) := \lambda(A)$ als $A \in \mathcal{A}$. Zij $\{q_n\}$ een rij van alle rationale getallen in $[0,1]$.

a) Bewijs dat $\mathcal{A}$ een σ-algebra is.

b) Zij $f(x) := x$. Is f meetbaar op $(X, \mathcal{A})$?

c) Zij $f(x) := x$ als x rationaal is en $f(x) := 1$ als x irrationaal is. Bewijs dat f meetbaar is op $(X, \mathcal{A})$.

d) Geef een stijgende rij van niet-negatieve simpele functies f_n op $(X, \mathcal{A})$ zo dat $f_n(x) \uparrow f(x)$ als $n \to \infty$ voor alle $x \in X$.

e) Bewijs dat de maat μ volledig is op $(X, \mathcal{A})$.

f) Zij f als in c). Bepaal $\int_X f \, d\mu$.

2. Zij $\mathcal{B}$ de Borel σ-algebra op $\mathbb{R}$. Op $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ is λ de Lebesgue-maat en μ een eindige maat. Definieer $F(x) := \mu\big((-\infty, x]\big)$ $(x \in \mathbb{R})$.

a) Bewijs dat de functie F monotoon niet-dalend en rechts-continu is.
Aanwijzing Gebruik voor het bewijs van de rechts-continuïteit de Stelling van Lebesgue toegepast op $F(x_n)$ met $x_n \downarrow x$.

b) Bewijs dat $\mu(\{x\}) = F(x) - \lim_{y \uparrow x} F(y)$.
Aanwijzing Gebruik de Stelling van Lebesgue toegepast op $F(x) - F(x_n)$ met $x_n \uparrow x$.

c) Bewijs dat er een aftelbare deelverzameling N van $\mathbb{R}$ is zo dat F continu is in alle punten van $\mathbb{R}$ die buiten N liggen.

d) Stel dat μ absoluut continu is t.o.v. λ. Bewijs dat F continu is op $\mathbb{R}$.

3. Zij $\mathcal{B}$ de Borel σ-algebra op $[0,1]$ en λ de Lebesgue-maat op $[0,1]$. Zij $f \colon [0,1] \to \mathbb{C}$ een integreerbare functie op $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$. Definieer $F(y) := \int_{[0,y]} f \, d\lambda$ $(y \in [0,1])$. Dan kan gemakkelijk worden bewezen dat F continu is op $[0,1]$, maar dat mag je aannemen. Definieer $G(x) := \int_{[0,x]} F \, d\lambda$ $(x \in [0,1])$. De (semi)normen $\|\,.\,\|_1$, $\|\,.\,\|_2$, $\|\,.\,\|_\infty$ worden genomen t.o.v. $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$.

a) Bewijs (met behulp van Fubini 2) dat $G(x) = \int_{[0,x]} (x-t)\, f(t) \, d\lambda(t)$.

b) Bewijs dat $\|G\|_\infty \le \|f\|_1$.

c) Stel dat $\|f\|_\infty < \infty$. Laat zien dat $\|f\|_1 \le \|f\|_\infty$ en $\|G\|_\infty \le \frac{1}{2}\|f\|_\infty$.

d) Stel dat $\|f\|_2 < \infty$. Laat zien dat $\|f\|_1 \le \|f\|_2$ en $\|G\|_\infty \le \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\|f\|_2$.

4. Formuleer en bewijs het Lemma van Fatou.