FNWI, UvA, Plantage Muidergracht 24, 1018 TV Amsterdam

Herkansingsentamen **Integratietheorie**, 24 januari 2008, 10.00–13.00 uur

Motiveer al je antwoorden. De sommen 1, 2, 3, 4 hebben gewichten 3, 3, 2, 2.
λ is de Lebesgue-maat.

1. Gegeven is dat f en g complexwaardige functies zijn op $[0,1]$ met f continu en g Lebesgue-integreerbaar. Definieer de functie F op $[0,1]$ door

$$F(y) := \int_{[0,1]} f(xy)\, g(x)\, d\lambda(x).$$

a) Laat zien dat F goed gedefinieerd is, d.w.z. dat $x \mapsto f(xy)\, g(x)$ Lebesgue-integreerbaar is op $[0,1]$ voor alle $y \in [0,1]$.

b) Laat zien met behulp van de Stelling van Lebesgue dat F continu is op $[0,1]$.

c) Stel dat f bovendien continu differentieerbaar is op $[0,1]$. Laat zien met behulp van de Stelling van Lebesgue dat F differentieerbaar is op $[0,1]$ met afgeleide

$$F'(y) = \int_{[0,1]} x\, f'(xy)\, g(x)\, d\lambda(x).$$

d) Stel dat f bovendien geschreven kan worden als $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$ met $c_n \in \mathbb{C}$ zo dat $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$. Bewijs (met gebruik van een geschikte stelling) dat $F(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, y^n$ ($y \in [0,1]$) voor zekere coëfficiënten $b_n \in \mathbb{C}$ met $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$.

2. Gegeven is dat f en g complexwaardige Lebesgue-integreerbare functies zijn op $[0,1]$. Definieer op $[0,1]$ de functies F en G door

$$F(x) := \int_{[0,x]} f\, d\lambda, \qquad G(x) := \int_{[0,x]} g\, d\lambda.$$

Dan kan eenvoudig bewezen worden (maar mag je aannemen) dat F en G continu zijn.

a) Stel dat bovendien $f, g \geq 0$. Bewijs met behulp van de Stelling van Fubini 1 dat

$$\int_{[0,x]} F\, g\, d\lambda + \int_{[0,x]} f\, G\, d\lambda = F(x)\, G(x) \qquad (x \in [0,1]).$$

b) Zonder het gegeven dat $f, g \geq 0$ kan de formule in a) bewezen worden met behulp van de Stelling van Fubini 2. Dan gebruik je weer wat je al in a) gedaan hebt, maar je moet nog iets toevoegen aan je bewijs om duidelijk te maken dat je de Stelling van Fubini 2 kunt gebruiken. Wat is dat?

3. Op de meetbare ruimte $([-1,1], \mathcal{B})$ (met $\mathcal{B}$ Borel σ-algebra) zijn eindige maten μ en ν gegeven door

$$\mu := \lambda_{[0,1]} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \delta_{-1+2^{-n}}, \qquad \nu := \lambda_{[-1,0]} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \delta_{1-2^{-n}}.$$

Hier is $\delta_x(A) := 1_A(x)$ en $\lambda_B(A) := \lambda(A \cap B)$ $(A, B \in \mathcal{B})$. Vind een ν-integreerbare functie $h \geq 0$ en een maat μ_s op $([-1,1], \mathcal{B})$ die t.o.v. ν singulier is, zo dat, met $d\mu_a := h\, d\nu$, geldt dat $\mu = \mu_a + \mu_s$.

4. Formuleer het Meetbaarheidslemma en bewijs dit.