Syllabus Integratietheorie

A. A. Balkema

grondig herzien door T. H. Koornwinder, `T.H.Koornwinder@uva.nl`

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde, Universiteit van Amsterdam

laatst gewijzigd 12 augustus 2008

Inhoudsopgave

Woord vooraf

De syllabus Integratietheorie van A. A. Balkema verscheen in eerste versie in 1993 en in herziene versie in 2000, waarbij het hoofdstuk over kansrekening verviel. Vervolgens voerde J.J.O.O. Wiegerinck in 2004 een lichte herziening uit. Een zeer grondige herziening werd in 2007 verricht door ondergetekende. Tenslotte werd deze versie in 2008 met grote precisie gecorrigeerd door A. J. Lenstra, waarvoor ik hem veel dank zeg.

De opzet van de syllabus is om eerst betrekkelijk snel en efficiënt de grondbegrippen in te voeren en hun belangrijkste eigenschappen te bewijzen. Dit culmineert in de Stelling van Lebesgue over gemajoreerde convergentie. Daarna worden allerlei toepassingen van de theorie behandeld. Deze toepassingen blijven echter wel binnen de wiskunde.

Een goede basiskennis van de integratietheorie, zoals door bestudering van deze syllabus kan worden verkregen, is noodzakelijk voor wie zich wil specialiseren in stochastiek (kansrekening, statistiek en financiële wiskunde) of in analyse (o.a. functionaalanalyse en differentiaalvergelijkingen, maar ook harmonische analyse en representatietheorie).

Nu volgt een iets gedetailleerder beschrijving van de inhoud. Het inleidende Hoofdstuk 1 geeft een eerste indruk van het verschil tussen Riemann- en Lebesgue-integraal. Hoofdstuk 2 voert meetbare ruimten en meetbare functies in. Hoofdstuk 3 kan als het kernhoofdstuk worden beschouwd. Hier definiëren we maatruimten en integreerbare functies en we behandelen de Stelling van de Monotone Convergentie, het Lemma van Fatou en de Stelling van Lebesgue over gemajoreerde convergentie. Hoofdstuk 4 behandelt het verwisselen van som en integraal, de continuïteit en differentieerbaarheid van integralen met een parameter en het verband tussen de Riemann-integraal en de Lebesgue-integraal. De theorie van de dichtheden is het onderwerp van Hoofdstuk 5.

In Hoofdstuk 6 behandelen we de Stelling van Fubini over het verwisselen van de integratievolgorde in een herhaalde integraal. Deze stelling volgt uit de Stelling van de Monotone Klasse, die als ander belangrijk gevolg de Eenduidigheidsstelling voor maten heeft. In Hoofdstuk 7 voeren we de functieruimten L^1, L^2 en L^∞ in. In feite zijn dit lineaire ruimten bestaande uit equivalentieklassen van functies, waarbij twee functies onderling equivalent worden genoemd als ze slechts op een verzameling van maat nul van waarde verschillen. Deze lineaire ruimten blijken genormeerde ruimten te zijn en ze zijn bovendien volledig t.o.v. hun norm: L^1 en L^∞ zijn Banach-ruimten en L^2 is een Hilbert-ruimte.

Tenslotte behandelt Hoofdstuk 8 de Stelling van Radon-Nikodym. Deze stelling geeft voor twee gegeven maten op een meetbare ruimte een fundamentele ontbinding van de ene maat t.o.v. de andere maat. Als toepassing van deze stelling in de kansrekening behandelen we het begrip voorwaardelijke verwachting.

In de syllabus zijn drie stellingen opgenomen zonder bewijs: het bestaan van de Lebesgue-maat (in Hoofdstuk 3) en de Transformatiestelling en de Isomorfiestelling (in Hoofdstuk 5). Sommige langere en meer technische bewijzen zijn in kleiner font weergegeven, wat betekent dat dat materiaal niet tot de verplichte collegestof behoort. Tot deze extra's behoort ook een aantal dieper liggende stellingen en verbanden, die zonder bewijs maar met literatuurverwijzing gegeven worden.

De opgaven zijn van uiteenlopende moeilijkheidsgraad. Voor de moeilijkste opgaven is het opgavenummer van een ster voorzien. Aanwijzingen voor oplossingen van veel van de opgaven staan achterin. Probeer een opgave eerst te maken zonder naar de aanwijzing achterin te kijken.

Tom Koornwinder, Amsterdam, augustus 2008

1 Inleiding

Deze inleiding beperkt zich tot een korte uitleg van de Lebesgue-integraal op een begrensd interval in $\mathbb{R}$, in vergelijking tot de Riemann-integraal.

Bekijk een begrensde functie $f\colon [a,b] \to [c,d)$ op een begrensd interval. We recapituleren eerst de definitie van de *Riemann-integraal*. Ten opzichte van een *partitie* $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ van het interval $[a,b]$ definiëren we de *ondersom*

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) \inf_{a_{i-1}\leq x\leq a_i} f(x)$$

en de *bovensom*

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) \sup_{a_{i-1}\leq x\leq a_i} f(x).$$

Als het supremum van de ondersommen gelijk is aan het infimum van de bovensommen dan is deze op twee manieren bereikte waarde per definitie gelijk aan de *Riemann-integraal* $\int_a^b f(x)\,dx$ en noemen we de functie f *Riemann-integreerbaar.*

Nu gaan we de *Lebesgue-integraal* van f definiëren. Hier werken we t.o.v. een partitie $c = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = d$ van het interval $[c,d)$. We definiëren een *ondersom*

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i-1}\,\lambda\bigl(f^{-1}([c_{i-1},c_i))\bigr)$$

en een *bovensom*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\,\lambda\bigl(f^{-1}([c_{i-1},c_i))\bigr),$$

waarbij $\lambda\bigl(f^{-1}([c_{i-1},c_i))\bigr)$ de zogenaamde *maat* is van de verzameling $f^{-1}([c_{i-1},c_i))$. Als het supremum van de ondersommen gelijk is aan het infimum van de bovensommen dan is deze op twee manieren bereikte waarde per definitie gelijk aan de *Lebesgue-integraal* $\int_{[a,b]} f\,d\lambda$ en noemen we de functie f *Lebesgue-integreerbaar.* Er kan de volgende stelling bewezen worden:

Als f Riemann-integreerbaar is dan is f Lebesgue-integreerbaar en is de Lebesgue-integraal van f gelijk aan de Riemann-integraal van f.

We geven nu de definitie van de *maat* $\lambda(E)$ van een verzameling $E \subset [a,b]$, mits E een zogenaamde *Lebesgue-meetbare* verzameling is. Dit gaat in een aantal stappen.

1. E is een interval. Dan is $\lambda(E)$ de lengte van het interval.

2. E is een open deelverzameling van $[a,b]$. Dan is E een disjuncte aftelbare vereniging van open (mogelijk bij a of b gesloten) deelintervallen E_k van $[a,b]$ en we definiëren $\lambda(E) := \sum_k \lambda(E_k)$.

3. E is willekeurig. Dan definiëren we de *uitwendige maat* van E als

$$\lambda_{\mathrm{e}}(E) := \inf_{\substack{U\supset E\\ U \text{ open}}} \lambda(U) \qquad \text{(de } e \text{ in } \lambda_{\mathrm{e}} \text{ komt van } \textit{exterior}\text{)}.$$

4. Als $\lambda_e(E) + \lambda_e([a,b]\backslash E) = b - a$ dan noemen we E *Lebesgue-meetbaar* en definiëren we de *Lebesgue-maat* van E als $\lambda(E) := \lambda_e(E)$.

Een belangrijke eigenschap is dat $\lambda(\bigcup_k E_k) = \sum_k \lambda(E_k)$ als $\{E_k\}$ een aftelbare disjuncte collectie is van Lebesgue-meetbare verzamelingen. Voor een functie f blijkt de Lebesgue-integraal goed gedefinieerd te kunnen worden als f de eigenschap heeft dat $f^{-1}([c', d'])$ Lebesgue-meetbaar is voor alle intervallen $[c', d'] \subset [c, d)$.

De Lebesgue-integraal heeft vele voordelen boven de Riemann-integraal:

1. Er zijn veel meer functies Lebesgue-integreerbaar dan Riemann-integreerbaar.
2. De definitie van Lebesgue-integraal kan moeiteloos worden uitgebreid tot het geval van onbegrensde functies en van functies gedefinieerd op een onbegrensd interval.
3. Bij de Lebesgue-integraal kan onder veel ruimere voorwaarden bewezen worden dat $\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n$ dan bij de Riemann-integraal.
4. De Lebesgue-integraal kan gegeneraliseerd worden tot een integraal van functies op veel algemenere ruimten dan een interval of een deelverzameling van $\mathbb{R}^d$.
5. De Lebesgue-integraal is noodzakelijk als we de functies willen beschrijven in de completering van de ruimte $C([a,b])$ t.o.v. de norm $\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx$ of de norm $\|f\|_2 := \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$.
6. De theorie van Lebesgue-maat en -integraal geeft een goede abstracte setting voor kansrekening en statistiek.

2 Meetbare functies

Om een maattheorie op te bouwen die niet gebonden is aan een bepaalde ruimte, $\mathbb{R}$ of $\mathbb{R}^d$, gaan we uit van het begrip maatruimte. Een maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bestaat uit een verzameling X, een collectie $\mathcal{A}$ van deelverzamelingen van X, de *meetbare verzamelingen*, en een functie $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$, de *maat*. Van de maat zullen we eisen dat hij σ-*additief* is: als $A_1, A_2, \ldots$ meetbaar zijn en disjunct, dan moet gelden dat $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$. Het ligt dus voor de hand te eisen dat de collectie $\mathcal{A}$ van de meetbare verzamelingen gesloten is onder aftelbare verenigingen van disjuncte verzamelingen. Het blijkt praktisch om iets meer te eisen: dat de meetbare verzamelingen een σ-algebra vormen; zie Definitie 2.1.

In dit hoofdstuk komt het begrip maat nog niet ter sprake. We onderzoeken eerst hoe de meetbare functies eruit zien.

2.1 Meetbare verzamelingen

Definitie 2.1. Een σ-*algebra* op een verzameling X is een collectie $\mathcal{A}$ van deelverzamelingen van X met de eigenschappen

a) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

b) $A \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad A^c := X \backslash A \in \mathcal{A}$,

c) $A_n \in \mathcal{A}\ (n = 1, 2, \ldots) \quad \Longrightarrow \quad \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

Een *meetbare ruimte* $(X, \mathcal{A})$ is een verzameling X met daarop een σ-algebra $\mathcal{A}$ van deelverzamelingen. Een deelverzameling $A \subset X$ heet *meetbaar* als hij in deze σ-algebra ligt.

Propositie 2.2. *Zij $\mathcal{A}$ een σ-algebra op X. Dan:*

a) $X \in \mathcal{A}$,

b) $A, B \in \mathcal{A} \quad \Longrightarrow \quad A \cup B,\ A \cap B$ *en* $A \backslash B \in \mathcal{A}$,

c) $A_n \in \mathcal{A}\ (n = 1, 2, \ldots) \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_n A_n \in \mathcal{A}$.

Bewijs Zie Opgave 2.1.

Voorbeeld 2.3. Zij X een willekeurige verzameling. Dan is elk van de volgende collecties $\mathcal{A}$ een voorbeeld van een σ-algebra:

a) $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$.

b) $\mathcal{A} = 2^X$, de collectie van alle deelverzamelingen van X.

c) $\mathcal{A} = \{A \subset X \mid A \text{ is aftelbaar of } A^c \text{ is aftelbaar}\}$.

2.2 De σ-algebra voortgebracht door een collectie deelverzamelingen

Lemma 2.4. *De doorsnede van een willekeurige familie σ-algebras op X is een σ-algebra op X.*

Bewijs Zij $\mathcal{A}_t$ een σ-algebra op X voor iedere $t \in T$ en zij $\mathcal{A} = \bigcap_t \mathcal{A}_t$ de doorsnede. Dan is $\mathcal{A}$ een collectie deelverzamelingen van X. Deze voldoet aan de drie eisen van een σ-algebra:

a) $\emptyset \in \mathcal{A}$ daar $\emptyset \in \mathcal{A}_t$ voor elke $t \in T$.

b) Stel $A \in \mathcal{A}$. Dan ligt A in $\mathcal{A}_t$ voor iedere $t \in T$, dus ook A^c ligt in $\mathcal{A}_t$ voor iedere $t \in T$, dus A^c ligt in de doorsnede $\mathcal{A}$.

c) Als $A_n \in \mathcal{A}$ voor $n = 1, 2, \ldots$, dan bevat iedere σ-algebra $\mathcal{A}_t$ de rij (A_n), dus ook de vereniging $\bigcup_n A_n$. Dus de vereniging $\bigcup_n A_n$ ligt in $\mathcal{A}$. $\square$

Is $\mathcal{C}$ een willekeurige collectie deelverzamelingen van X, dan kan men dus spreken over de kleinste σ-algebra op X die $\mathcal{C}$ omvat. Dit is de doorsnede van alle σ-algebra's op X die $\mathcal{C}$ omvatten. Er is altijd wel een σ-algebra die $\mathcal{C}$ omvat: de machtsverzameling 2^X.

Definitie 2.5. Zij $\mathcal{C}$ een collectie deelverzamelingen van X. De doorsnede van alle σ-algebra's op X die $\mathcal{C}$ omvatten heet de σ-algebra *voortgebracht* door $\mathcal{C}$ en wordt aangegeven met $\sigma(\mathcal{C})$.

2.3 Borel-verzamelingen

Definitie 2.6. Zij X een topologische ruimte. De σ-algebra voortgebracht door de collectie van de open deelverzamelingen van X heet de *Borel-σ-algebra* van X en wordt gewoonlijk aangegeven met $\mathcal{B}$. De verzamelingen $B \in \mathcal{B}$ zijn de *Borel-verzamelingen* van X. Bij een topologische ruimte, bijvoorbeeld $\mathbb{R}$ of $\mathbb{R}^d$, werken we steeds met de Borel-σ-algebra, tenzij expliciet een andere σ-algebra is aangegeven.

Voorbeeld 2.7. (zie Opgave 2.4)
Elk van de onderstaande collecties $\mathcal{C}_i$ brengt de Borel-σ-algebra op $\mathbb{R}$ voort.

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &= \{(-\infty, c) \mid c \in \mathbb{Q}\}, \\
\mathcal{C}_2 &= \{(-\infty, c) \mid c \in \mathbb{R}\}, \\
\mathcal{C}_3 &= \{(-\infty, c] \mid c \in \mathbb{R}\}, \\
\mathcal{C}_4 &= \{(a, b] \mid a < b\}, \\
\mathcal{C}_5 &= \{(a, b) \mid a < b\}, \\
\mathcal{C}_6 &= \{O \subset \mathbb{R} \mid O \text{ open}\}.
\end{aligned}$$

Voorbeeld 2.8. (zie Opgave 2.5)
De collectie $\mathcal{C}$ van de open halfruimten

$$H_{i,c} := \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_i < c\} \qquad (i = 1, \ldots, d, \quad c \in \mathbb{R})$$

brengt de Borel-σ-algebra op $\mathbb{R}^d$ voort.

2.4 Meetbare afbeeldingen

Definitie 2.9. Een afbeelding f van een meetbare ruimte $(X_1, \mathcal{A}_1)$ naar een meetbare ruimte $(X_2, \mathcal{A}_2)$ is *meetbaar* als geldt

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1 \text{ voor elke } A \in \mathcal{A}_2.$$

Propositie 2.10. *Stel f en g zijn meetbaar,*

$$(X_1, \mathcal{A}_1) \quad \xrightarrow{f} \quad (X_2, \mathcal{A}_2) \quad \xrightarrow{g} \quad (X_3, \mathcal{A}_3).$$

Dan is de samenstelling $g \circ f$ meetbaar.

Bewijs Zie Opgave 2.6.

Een *meetbare functie* op een meetbare ruimte $(X, \mathcal{A})$ is een meetbare afbeelding van X naar $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$, waarbij de σ-algebra op $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$ de Borel-σ-algebra is. Als X een topologische ruimte is dan werken we doorgaans met de Borel-σ-algebra $\mathcal{B}$ op X en bij een meetbare functie op X zal meetbaar bedoeld zijn t.o.v. deze Borel-σ-algebra. Meetbare functies op een topologische ruimte X worden ook *Borel-functies* genoemd.

2.5 Het Meetbaarheidslemma

Lemma 2.11 (Meetbaarheidslemma)**.** *Zij f een afbeelding van de meetbare ruimte $(X, \mathcal{A})$ naar de meetbare ruimte $(Y, \mathcal{E})$ en zij $\mathcal{C}$ een collectie deelverzamelingen van Y die de σ-algebra $\mathcal{E}$ voortbrengt. De afbeelding f is meetbaar als*

$$f^{-1}(C) \in \mathcal{A} \textit{ voor elke } C \in \mathcal{C}.$$

Bewijs Zij $\mathcal{E}_0$ de collectie van alle verzamelingen $E \in \mathcal{E}$ met de eigenschap $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. We zullen bewijzen dat $\mathcal{E}_0$ een σ-algebra is. Uit $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}_0$ volgt dan $\mathcal{E} = \sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{E}_0$, dus f is meetbaar.

a) $\emptyset \in \mathcal{E}_0$ daar $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$.

b) Zij $E \in \mathcal{E}_0$. Dan $f^{-1}(E^c) = (f^{-1}(E))^c \in \mathcal{A}$, dus $E^c \in \mathcal{E}_0$.

c) Zij $E_n \in \mathcal{E}_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Uit $f^{-1}\Big(\bigcup_n E_n\Big) = \bigcup_n f^{-1}(E_n) \in \mathcal{A}$ volgt $\bigcup_n E_n \in \mathcal{E}_0$. □

Het Meetbaarheidslemma heeft een aantal belangrijke gevolgen:

Gevolg 2.12. *De functie $f : X \to \mathbb{R}$ is meetbaar als $f^{-1}\big((-\infty, c)\big)$ meetbaar is voor elke $c \in \mathbb{R}$.*

Bewijs Zie Voorbeeld 2.7.

Voorbeeld 2.13. Zij $C \subset X$. Dan is de indicatorfunctie $1_C \colon X \to \mathbb{R}$ meetbaar precies als C meetbaar is.

Notatie Zij $f \colon X \to \mathbb{R}$ en $c \in \mathbb{R}$. Dan is

$$\{f < c\} := \{x \in X \mid f(x) < c\}.$$

Analoog definiëren we $\{f > c\}$, $\{|f| < 1\}$, etc.

Gevolg 2.14. *Een continue afbeelding is* Borel-meetbaar*.*

Bewijs Stel $f : X \to Y$ is continu. De open verzamelingen $O \subset Y$ brengen de Borel-σ-algebra op Y voort, en $\{f \in O\}$ is open in X, dus Borel-meetbaar. □

Gevolg 2.15. *De functies $f_i : X \to \mathbb{R}$ zijn meetbaar voor $i = 1, \ldots, d$ dan en slechts dan als $f := (f_1, ..., f_d) \colon X \to \mathbb{R}^d$ meetbaar is.*

Bewijs Veronderstel eerst dat $f_1, \ldots, f_d$ meetbaar zijn. De halfruimten $H_{i,c}$ uit Voorbeeld 2.8 brengen de Borel-σ-algebra voort op $\mathbb{R}^d$, en er is gegeven dat $\{f \in H_{i,c}\} = \{f_i < c\}$ meetbaar is. Dus f is meetbaar.

Omgekeerd, zij f meetbaar. Dan $f_i = \pi_i \circ f$, waarbij $\pi_i(x_1, \ldots, x_d) := x_i$ een continue, dus meetbare afbeelding van $\mathbb{R}^d$ naar $\mathbb{R}$ definieert. Gebruik nu Propositie 2.10. □

Gevolg 2.16. *$f\colon X \to \mathbb{C}$ is meetbaar (t.o.v. de Borel-σ-algebra op $\mathbb{C}$) dan en slechts dan als het reële deel $\operatorname{Re} f$ en het imaginaire deel $\operatorname{Im} f$ meetbaar zijn.*

Gevolg 2.17. *Als $f_1, \ldots, f_d$ meetbare reëelwaardige functies zijn op $(X, \mathcal{A})$ en ϕ is een reëelwaardige Borel-functie op $\mathbb{R}^d$ (dus $\{\phi < c\}$ is een Borelverzameling van $\mathbb{R}^d$ voor elke $c \in \mathbb{R}$), dan is $\phi \circ (f_1, \ldots, f_d)$ meetbaar op $(X, \mathcal{A})$.*

Bewijs Gebruik Propositie 2.10.

Gevolg 2.18. *Als f en g meetbare reëelwaardige functies zijn op $(X, \mathcal{A})$, dan ook $f + g$ en fg.*

Voorbeeld 2.19. Als f en g meetbare reëelwaardige functies zijn op $(X, \mathcal{A})$ dan kun je met behulp van het bovenstaande heel gecompliceerde meetbare functies construeren, bijvoorbeeld

$$x \mapsto \exp\left(- \frac{g(x) \log(\cosh f(x))}{\sqrt{1 + \sin^2(g(x))}} \right).$$

2.6 Meetbare functies

Welke functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn meetbaar? De continue functies zijn Borel-functies, maar ook functies van de vorm

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq -1, \\ x, & -1 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1, \end{cases}$$

of

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{als } x \text{ rationaal is,} \\ \cos x & \text{als } x \text{ irrationaal is,} \end{cases}$$

of

$$f(x) = \sin(kx) \qquad (k \leq x < k + 1,\ k \in \mathbb{Z}).$$

Men kan meetbare functies maken met knippen en plakken. Als f_n meetbaar is voor $n = 1, 2, \ldots$ en als $E_1, E_2, \ldots$ disjuncte Borel-verzamelingen zijn met $\bigcup_n E_n = \mathbb{R}$, dan is

$$f = \sum_n f_n \, 1_{E_n}$$

goed gedefinieerd en meetbaar. Immers, de som rechts bevat ten hoogste één term ongelijk nul voor vaste $x \in \mathbb{R}$. Er zijn dus geen convergentieproblemen. Meetbaarheid van f volgt uit

$$\{f < c\} = \bigcup_n \Big(E_n \cap \{f_n < c\} \Big).$$

Stel $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ is meetbaar voor $n = 1, 2, \ldots$. Zij $f = \inf_n f_n$. Is f meetbaar? Er geldt (ga na):

$$\{f < c\} = \bigcup_n \{f_n < c\}.$$

Merk echter op dat f in zekere punten $x \in X$ de waarde $-\infty$ kan hebben. We zullen daarom in het vervolg functies beschouwen met waarden in de uitgebreide reële rechte $[-\infty, \infty]$. Deze functies komen in de integratietheorie veelvuldig voor.

We spreken nu af dat bij een meetbare functie de waarden ∞ en $-\infty$ zijn toegestaan.

2.7 De uitgebreide reële rechte $[-\infty, \infty]$

De *uitgebreide reële rechte* is de verzameling

$$[-\infty, \infty] := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

We maken $[-\infty, \infty]$ tot een geordende verzameling door te zeggen dat zijn deelverzameling $\mathbb{R}$ de ordening van $\mathbb{R}$ heeft en dat

$$-\infty < c < \infty \text{ voor elke } c \in \mathbb{R}.$$

Het zal nu duidelijk zijn wat we bedoelen met intervallen $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) en $[iy, \infty]$ als $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Voor elke deelverzameling $V \subset [-\infty, \infty]$ bestaan de *kleinste bovengrens* $\sup V$ en de *grootste ondergrens* $\inf V$. Immers, als V een naar boven begrensde niet-lege deelverzameling van $\mathbb{R}$ is dan zegt een axioma voor $\mathbb{R}$ dat $\sup V$ bestaat in $\mathbb{R}$, en als V een naar boven onbegrensde deelverzameling is van $\mathbb{R}$ dan is $\sup V = \infty$. Analoge resultaten gelden voor $\inf V$. Voor niet-lege V geldt dat $\inf V \leq \sup V$.

We maken $[-\infty, \infty]$ tot een *topologische ruimte* door als basis van open verzamelingen te nemen de intervallen (a, b) $(-\infty < a < b < \infty)$, $[-\infty, a)$ $(a \in \mathbb{R})$ en $(a, \infty]$ $(a \in \mathbb{R})$. Dan valt de topologie van $\mathbb{R}$ als deelverzameling van $[-\infty, \infty]$ samen met de gebruikelijke topologie van $\mathbb{R}$. Ook is $[-\infty, \infty]$ homeomorf met $[-1, 1]$, bijvoorbeeld via het homeomorfisme $x \mapsto \tan(\frac{1}{2}\pi x) \colon [-1, 1] \to [-\infty, \infty]$. Deze afbeelding behoudt ook de ordening.

Nu kunnen we spreken over de limiet van een rij (x_n) in $[-\infty, \infty]$, zo die bestaat. Als $c \in \mathbb{R}$ dan zal duidelijk zijn wat er bedoeld wordt met $\lim_{n\to\infty} x_n = c$. We zeggen dat $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ als er bij elke $M \in \mathbb{R}$ een index n_0 bestaat zo dat $x_n > M$ voor $n > n_0$, en analoog $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Iedere monotone rij in $[-\infty, \infty]$ heeft een limiet, nl. zijn supremum of infimum. Dus we kunnen voor elke rij (x_n) in $[-\infty, \infty]$ ook spreken van

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} x_n &:= \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{m \geq n} x_m \right) = \inf_n \left(\sup_{m \geq n} x_m \right), \\ \liminf_{n\to\infty} x_n &:= \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{m \geq n} x_m \right) = \sup_n \left(\inf_{m \geq n} x_m \right). \end{aligned}$$

Uit de topologie van $[-\infty, \infty]$ volgt de Borel-σ-algebra voor $[-\infty, \infty]$. Deze wordt voortgebracht door de Borel-deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ samen met $\{-\infty\}$ en $\{\infty\}$, maar hij wordt ook voortgebracht door de verzamelingen $[-\infty, c)$ $(c \in \mathbb{R})$; zie Opgave 2.7.

Propositie 2.20. *Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte en $f \colon X \to [-\infty, \infty]$ een functie. De volgende uitspraken zijn equivalent:*

a) f is meetbaar,

b) $\{f < c\} \in \mathcal{A}$ voor elke $c \in \mathbb{R}$,

c) $\{f \leq c\} \in \mathcal{A}$ voor elke $c \in \mathbb{R}$,

d) $\{f > c\} \in \mathcal{A}$ voor elke $c \in \mathbb{R}$,

e) $\{f \geq c\} \in \mathcal{A}$ voor elke $c \in \mathbb{R}$.

Bewijs Zie Opgave 2.8.

Met de rekenkundige bewerkingen in $[-\infty, \infty]$ moeten we voorzichtig zijn. T.a.v. de optelling mogen we schrijven:

$$a + \infty = \infty + a = \infty \text{ als } a > -\infty, \quad a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty \text{ als } a < \infty,$$

maar $\infty + (-\infty)$ en $(-\infty) + \infty$ hebben geen betekenis. Algemener mogen we eindig veel termen optellen met behoud van commutativiteit en associativiteit mits er niet zowel een term ∞ als een term $-\infty$ voorkomt. Een aftrekking $a - b$ herschrijven we als $a + (-b)$ en dan volgen we de net genoemde regels voor de optelling.

T.a.v. de vermenigvuldiging mogen we schrijven:

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \begin{cases} \infty & \text{als } a > 0, \\ -\infty & \text{als } a < 0, \\ 0 & \text{als } a = 0, \end{cases} \qquad \text{en} \quad a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \begin{cases} -\infty & \text{als } a > 0, \\ \infty & \text{als } a < 0, \\ 0 & \text{als } a = 0. \end{cases}$$

Dus $0 \cdot \infty = 0$, wat gevaarlijk lijkt. In producten van eindig veel factoren geeft het echter geen problemen: een product is 0 precies als minstens een van de factoren gelijk 0 is, en commutativiteit en associativiteit van de vermenigvuldiging blijven behouden. Zelfs distributiviteit blijft behouden mits we alleen met factoren en termen ≥ 0 werken. De distributiviteit geldt niet als zowel negatieve als positieve elementen meedoen, bijvoorbeeld

$$0 = 0 \cdot \infty = (1 + (-1)) \cdot \infty \text{ kan niet geschreven worden als } 1 \cdot \infty + (-1) \cdot \infty = \infty + (-\infty),$$

want de laatste uitdrukking is ongedefinieerd.

We zullen de conventie $0 \cdot \infty = 0$ vooral gebruiken in producten

$$(1_E\, f)(x) = 1_E(x)\, f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{als } x \in E, \\ 0 & \text{als } x \in E, \end{cases}$$

waarbij $f \colon X \to [-\infty, \infty]$ en $E \subset X$.

2.8 Behoud van meetbaarheid

Uit de volgende proposities blijkt dat het niet eenvoudig is een functie op $\mathbb{R}$ of $\mathbb{R}^d$ te verzinnen die geen Borel-functie is. We hebben in §2.5 gezien dat de continue functies meetbaar zijn.

Propositie 2.21. *Zij f een meetbare functie op de meetbare ruimte $(X, \mathcal{A})$. Dan is ook de functie $-f$ meetbaar.*

Bewijs Gebruik Propositie 2.20 in combinatie met $\{-f < c\} = \{f > -c\}$. □

Propositie 2.22. *Zij (f_n) een rij meetbare functies op de meetbare ruimte $(X, \mathcal{A})$. Dan zijn ook de functies $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ en $\liminf_{n\to\infty} f_n$ meetbaar.*

Bewijs Dit volgt uit de gelijkheden

$$\begin{aligned}\{\inf_n f_n < c\} &= \bigcup_n \{f_n < c\},\\ \sup_n f_n &= -\inf_n(-f_n),\\ \limsup_{n\to\infty} f_n &= \inf_n \left(\sup_{m\geq n} f_m\right),\\ \liminf_{n\to\infty} f_n &= -\limsup_{n\to\infty}(-f_n).\end{aligned}$$

Gevolg 2.23. *De limiet van een puntsgewijs convergente rij meetbare functies is meetbaar.*

Gevolg 2.24. *Het maximum en minimum van eindig veel meetbare functies zijn weer meetbare functies.*

Notatie Zij $f : X \to [-\infty, \infty]$ een functie. Definieer f^+, het *positieve deel* van f, en f^-, het *negatieve deel* van f, door

$$\begin{aligned}f^+(x) &:= \max(0, f(x)) \quad (x \in X),\\ f^-(x) &:= \max(0, -f(x)) \quad (x \in X).\end{aligned}$$

Dan zijn f^+ en f^- niet-negatief, voor elke $x \in X$ is minstens een van beide functies gelijk 0, en

$$f = f^+ - f^-, \text{ waarbij } \infty - \infty \text{ niet kan voorkomen.}$$

Merk ook op dat

$$|f| = \max(f, -f) = f^+ + f^-.$$

Wegens Gevolg 2.24 zijn f^+, f^- en $|f|$ meetbaar als f meetbaar is.

De volgende propositie breidt het behoud van meetbaarheid onder optelling van functies $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ uit tot functies met waarden in $[-\infty, \infty]$, mits hun som goed gedefinieerd is.

Propositie 2.25. *Laat f en g meetbare functies zijn op de meetbare ruimte $(X, \mathcal{A})$. Als $\{f = -\infty\} \cap \{g = \infty\} = \emptyset = \{f = \infty\} \cap \{g = -\infty\}$ dan is $f + g$ een meetbare functie.*

Bewijs Zij $c \in \mathbb{R}$. Dan geldt

$$\{f + g < c\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \Big(\{f < q\} \cap \{g < c - q\}\Big).$$

Want de verzameling in het rechterlid is duidelijk bevat in de verzameling in het linkerlid. We moeten dus nog bewijzen: als $f(x) + g(x) < c$ dan $f(x) < q$ en $g(x) < c - q$ voor zekere $q \in \mathbb{Q}$. Dit is duidelijk als $f(x) = -\infty$ of $g(x) = -\infty$. Veronderstel dus dat $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$. Dan $f(x) + g(x) < c - \varepsilon$ voor zekere $\varepsilon > 0$, terwijl $q - \varepsilon < f(x) < q$ voor zekere $q \in \mathbb{Q}$, dus $g(x) < c - \varepsilon - f(x) < c - q$.

Omdat de verzameling $\mathbb{Q}$ van de rationale getallen aftelbaar is, volgt uit bovenstaande identiteit dat de verzameling $\{f + g < c\}$ meetbaar is. $\square$

Propositie 2.26. *Stel $f_n \geq 0$ is meetbaar voor $n = 1, 2, \ldots$. Dan is $\sum_n f_n$ meetbaar.*

Bewijs Zie Opgave 2.10.

De constructie van een niet-meetbare functie op $\mathbb{R}$ is niet eenvoudig. Men mag er wel van uitgaan dat de functies op $\mathbb{R}$ of op $\mathbb{R}^d$ die men in de praktijk tegenkomt meetbaar zullen zijn. Waarom dan een heel hoofdstuk over meetbaarheid?

1) Soms werkt men op een verzameling met twee of meer verschillende σ-algebra's. Het is dan noodzakelijk een duidelijk onderscheid te maken tussen functies die meetbaar zijn t.o.v. de ene σ-algebra en functies die meetbaar zijn t.o.v. de andere σ-algebra.

2) Het is soms nodig te bewijzen dat een bepaalde constructie een meetbare functie oplevert; zie bijvoorbeeld het bewijs van de Stelling van Fubini later in deze syllabus.

2.9 Een voorbeeld van Banach en Mazurkiewicz

Een beroemd voorbeeld, afkomstig van Banach en Mazurkiewicz [20], van een verzameling die niet Borel-meetbaar is, is de verzameling $\mathcal{D}$ van alle differentieerbare functies binnen de ruimte $C([0,1])$ van alle continue functies op het interval $[0,1]$ (met de topologie afkomstig van de sup-norm). Ik geef wat verdere achtergrond; zie bijvoorbeeld [1, Ch.3].

Een *Poolse ruimte* is een topologische ruimte die homeomorf is met een separabele volledige metrische ruimte. Voorbeelden zijn vaak onverwacht. Uiteraard is $\mathbb{R}$ een Poolse ruimte, maar zijn deelverzameling van irrationale getallen, met de door $\mathbb{R}$ geïnduceerde metriek zeker niet volledig, heeft een andere wel volledige metriek die compatibel is met de door $\mathbb{R}$ geïnduceerde topologie. Een deelverzameling V van een Poolse ruimte X is Borel precies als er een Poolse ruimte Y is en een injectieve continue afbeelding $f\colon Y \to X$ zo dat $f(Y) = V$. Algemener heet een deelverzameling V van een Poolse ruimte X *analytisch* als er een Poolse ruimte Y is en een (niet noodzakelijk injectieve) continue afbeelding $f\colon Y \to X$ zo dat $f(Y) = V$. Een analytische deelverzameling van een Poolse ruimte is Borel precies als zijn complement analytisch is.

De Banach-ruimte $C([0,1])$ van reëelwaardige continue functies op $[0,1]$ met de supnorm is een Poolse ruimte (want is separabel, d.w.z. heeft een aftelbare dichte deelverzameling). De deelruimte $C^1([0,1])$ van continu differentieerbare functies is Borel, want is het continue injectieve beeld van een Poolse ruimte (een aardige oefening), maar de deelverzameling van differentieerbare functies in $C([0,1])$ is niet Borel, wel het complement van een analytische deelverzameling. Dit werd als vermoeden geuit door Banach (zie [33, Problem 53]) en bewezen door S. Mazurkiewicz [20]; zie ook [25, §4.6].

2.10 Simpele functies

Definitie 2.27. Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte. Een *simpele functie* op X is een meetbare functie $t\colon X \to \mathbb{R}$ die slechts eindig veel waarden aanneemt.

Opmerking 2.28. Als $q \in \{1, 2, \ldots\}$ en $A_1, \ldots, A_q$ meetbare deelverzamelingen zijn van X en $c_1, \ldots, c_q \in \mathbb{R}$ dan is

$$t = c_1 1_{A_1} + \cdots + c_q 1_{A_q} \tag{2.1}$$

een simpele functie. Ook voor $q = 0$ heeft dit betekenis: rechts staat de lege som en links de simpele functie $t = 0$. Iedere simpele functie heeft de gedaante (2.1). Hierbij kunnen we de verzamelingen A_i ook nog disjunct en niet-leeg nemen, en alle c_i verschillend en ongelijk 0, en met deze eisen is de schrijfwijze (2.1) uniek. Als $t \geq 0$ dan kunnen we de coëfficiënten c_i in (2.1) bovendien positief nemen.

De simpele functies vormen dus een lineaire ruimte die wordt opgespannen door de indicatorfuncties 1_A $(A \in \mathcal{A})$. Verder zijn het maximum en minimum van eindig veel simpele functies weer simpele functies.

Als X een interval in $\mathbb{R}$ is, dan is een *trapfunctie* op X gedefinieerd als een simpele functie t op X van de vorm (2.1) waarbij de meetbare verzamelingen A_i deelintervallen van X zijn. De grafiek van een reëelwaardige trapfunctie heeft dus een trapvorm.

De volgende drie proposities geven steeds specialere benaderingen van een niet-negatieve meetbare functie met niet-negatieve simpele functies.

Afspraak Een rij (a_n) in $[-\infty, \infty]$ heet *stijgend* als $a_n \leq a_{n+1}$ voor alle n en hij heet *dalend* als $a_n \geq a_{n+1}$ voor alle n.

Een rij van functies $f_n \colon X \to [-\infty, \infty]$ heet *stijgend* als $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ voor alle n en voor alle $x \in X$ en hij heet *dalend* als $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ voor alle n.

Een functie $f \colon I \to [-\infty, \infty]$ (I een interval) heet *stijgend* als $f(x) \leq f(y)$ voor $x < y$ en hij heet *dalend* als $f(x) \geq f(y)$ voor $x < y$.

Propositie 2.29. *Iedere niet-negatieve meetbare functie is het supremum van een aftelbare collectie niet-negatieve simpele functies.*

Bewijs Zij $f \geq 0$ meetbaar op X. Dan geldt voor elke $x \in X$:

$$f(x) = \sup\{q \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq q \leq f(x)\} = \sup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,\infty)} q\, 1_{\{f \geq q\}}(x).$$

Hier vormen de functies $q\, 1_{\{f \geq q\}}$ ($q \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$) een aftelbare collectie van niet-negatieve simpele functies. $\square$

Propositie 2.30. *Iedere niet-negatieve meetbare functie is de puntsgewijze limiet van een stijgende rij niet-negatieve simpele functies.*

Bewijs Als $f = \sup_n t_n$ volgens Propositie 2.29 dan is ook

$$f = \sup_n \max(t_1, \dots, t_n) = \lim_{n \to \infty} \max(t_1, \dots, t_n),$$

waarbij $\big(\max(t_1, \dots, t_n)\big)$ een stijgende rij van niet-negatieve simpele functies is. $\square$

Propositie 2.31. *Iedere niet-negatieve meetbare functie is de som van een rij niet-negatieve simpele functies.*

Bewijs Als $f = \lim_{n \to \infty} t_n$ volgens Propositie 2.30 dan

$$f = \lim_{n \to \infty} \Big(t_1 + (t_2 - t_1) + \dots + (t_n - t_{n-1}) \Big) = t_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (t_{n+1} - t_n),$$

waarbij $t_1, (t_{n+1} - t_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij niet-negatieve simpele functies is. $\square$

Uit de analyse is bekend dat in een som $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ van niet-negatieve termen a_n men haakjes mag plaatsen zoals men wil. Propositie 2.31 heeft daardoor als verrassende consequentie:

Stelling 2.32. *Elke niet-negatieve meetbare functie heeft de gedaante*

$$f = \sum_n c_n 1_{A_n} \tag{2.2}$$

met $0 < c_n < \infty$ *en* A_n *meetbaar.*

Merk op dat de meetbare verzamelingen A_n in (2.2) niet disjunct hoeven te zijn, en sterker, lang niet altijd disjunct kunnen zijn. Zie Opgave 2.11.

2.11 Opgaven

Opgave 2.1. Bewijs Propositie 2.2.

Opgave 2.2. Bepaal $\sigma(\mathcal{C})$ als $\mathcal{C} = \emptyset$ en als $\mathcal{C} = \{\emptyset\}$.

Opgave 2.3. Bepaal $\sigma(\mathcal{C})$ als $X = \mathbb{Q}$, de verzameling der rationale getallen, en $\mathcal{C}$ de collectie is van de eenpuntsverzamelingen $\{q\}$ $(q \in \mathbb{Q})$.

Opgave 2.4. Bewijs de beweringen in Voorbeeld 2.7.

Opgave 2.5. Bewijs de beweringen in Voorbeeld 2.8.

Opgave 2.6. Bewijs Propositie 2.10.

Opgave 2.7. Bewijs dat de Borel-σ-algebra voor $[-\infty, \infty]$ wordt voortgebracht door de verzamelingen $[-\infty, c)$ $(c \in \mathbb{R})$.

Opgave 2.8. Bewijs Propositie 2.20.

Opgave 2.9. Zij X een verzameling, $f, g, h \colon X \to \mathbb{R}$, $g, h \geq 0$ en $f = g - h$. Bewijs dat $g - f^+ = h - f^- \geq 0$.

Opgave 2.10. Bewijs Propositie 2.26.

Opgave 2.11.
a) Karakteriseer de functies f van de vorm (2.2) met $0 < c_n < \infty$ en de A_n meetbaar en disjunct. Waarom kunnen doorgaans niet alle niet-negatieve meetbare functies zo geschreven worden?

b) Schrijf de meetbare functie $x \mapsto \infty \colon [0,1] \to [0, \infty]$ in de vorm (2.2).

c) Schrijf de meetbare functie $x \mapsto x$ op $[0,1]$ in de vorm (2.2).

Opgave 2.12. Onderzoek of de volgende deelverzameling van $\mathbb{R}$ Borel-meetbaar is:

$$\{x \in (0,1) \mid x \text{ heeft slechts eindig veel zevens in zijn decimale ontwikkeling}\}.$$

Opgave 2.13. Een stijgende functie $f \colon \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ is meetbaar.

Opgave 2.14. Als f en g meetbare functies zijn op X dan is $\{f < g\}$ meetbaar. Zo ook $\{f = g\}$.

Opgave 2.15. Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte. Bewijs het volgende. Een functie $f \colon X \to [-\infty, \infty]$ is meetbaar precies als $f 1_{\{|f| < \infty\}}$ meetbaar is en tevens de verzamelingen $\{f = \infty\}$ en $\{f = -\infty\}$ meetbaar zijn.

Opgave 2.16. Zij (f_n) een rij meetbare functies op X. De rij $(f_n(x))$ hoeft niet in elk punt x van X te convergeren. Definieer f als de limiet waar die bestaat:

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x) & \text{als deze limiet bestaat en eindig is,} \\ -\infty & \text{elders.} \end{cases}$$

Bewijs dat de functie f meetbaar is.

Opgave 2.17. Zij f een willekeurige reëelwaardige functie op de topologische ruimte X. Dan is de verzameling $\{x \in X \mid f \text{ is continu in } x\}$ Borel-meetbaar.

Opgave 2.18. Zij X_0 een deelverzameling van de topologische ruimte X. Dan is X_0 een topologische ruimte (met open verzamelingen $O \cap X_0$ met O open in X). Zij $\mathcal{B}_0$ de Borel σ-algebra op X_0. Bewijs dat $\mathcal{B}_0$ de collectie is van alle verzamelingen $B \cap X_0$ met B een Borel-verzameling in X.

Opgave 2.19. Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte en $f : X \to \mathbb{R}$ een meetbare functie. Laat $\mathcal{B}$ de σ-algebra zijn die voortgebracht wordt door de verzamelingen $\{f < c\}$ $(c \in \mathbb{R})$.

a) Laat zien dat $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ en dat voor $B \in \mathcal{B}$ geldt $x \in B$ en $f(y) = f(x)$ dan $y \in B$.

b) Laat g een $\mathcal{B}$-meetbare functie zijn naar $\mathbb{R}$. Bewijs dat $\exists G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $g = G \circ f$.

3 Maat en integraal

In dit hoofdstuk bewijzen we een aantal fundamentele stellingen uit de integratietheorie. We beginnen met de definitie van een maat op een σ-algebra, en laten dan zien hoe de integraal van een niet-negatieve meetbare functie gedefinieerd kan worden.

3.1 Maatruimte

Definitie 3.1. Een *maat* op een σ-algebra $\mathcal{A}$ op de verzameling X is een functie $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ met de eigenschappen

a) $\mu(\emptyset) = 0$.

b) μ is *σ-additief*: als $A_n \in \mathcal{A}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ disjunct zijn, dan geldt

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n).$$

Het tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heet een *maatruimte*. We zeggen dan ook dat μ een maat is op de meetbare ruimte $(X, \mathcal{A})$.

Opmerking 3.2. σ-additiviteit impliceert *additiviteit*: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ voor A en B disjunct en meetbaar.

Merk verder op dat eigenschap a) in Definitie 3.1 volgt uit eigenschap b) als er een meetbare verzameling met eindige maat is (zie Opgave 3.1).

Voorbeeld 3.3. Hier is een aantal voorbeelden van maatruimten $(X, \mathcal{A}, \mu)$ met X een willekeurige niet-lege verzameling en $\mathcal{A}$ een i.h.a. willekeurige σ-algebra.

1. $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ en $\mu(X) = c$ met $c \in [0, \infty]$ willekeurig.
2. $\mu(A) = \infty$ voor $A \neq \emptyset$.
3. $\mu(A) = \#A$ (het aantal punten in A). Dit is de *telmaat* op $(X, \mathcal{A})$. Deze is goed gedefinieerd voor willekeurige σ-algebra $\mathcal{A}$, maar wordt vooral beschouwd als $\mathcal{A} = 2^X$.
4. $w \colon X \to [0, \infty]$ is een willekeurige functie en $\mu(A) = \sum_{x \in A} w(x)$. Hier heeft elk punt x een *gewicht* $w(x)$ en de som van de gewichten van de punten in A geeft $\mu(A)$.
5. Als in 4. met $w = 1_S$ voor een zekere $S \subset X$ (S hoeft niet per se meetbaar te zijn). Dan is $\mu(A) = \#(A \cap S)$, dus $\mu(A)$ het aantal punten uit S in A.

Definitie 3.4. Zij μ een maat op $(X, \mathcal{A})$. Dan heet μ een *eindige maat* als $\mu(X) < \infty$ en μ heet een *kansmaat* als $\mu(X) = 1$. In het geval van een kansmaat heet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een *kansruimte*

In het algemeen hebben we bij kansruimten $(X, \mathcal{A}, \mu)$ zeer grote en complexe verzamelingen X waar we weinig informatie over hebben. Dan interpreteren we $\mu(A)$ $(A \in \mathcal{A})$ als de kans dat een punt x uit X in de deelverzameling A ligt. In de praktijk werken we met *stochastische variabelen* f; dit zijn meetbare functies f op X. Als $a < b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ dan geeft $\mu(\{a \leq f \leq b\})$ de kans dat f een waarde heeft in het interval $[a, b]$. Denk bij f bijvoorbeeld aan de temperatuur op een bepaald toekomstig tijdstip en een bepaalde plaats, of aan de koers van een aandeel op een bepaald toekomstig tijdstip.

Als X een topologische ruimte is met Borel-σ-algebra $\mathcal{B}$ dan bedoelen we met een maat op X een maat op $(X, \mathcal{B})$, tenzij anders vermeld.

3.2 De Lebesgue-maat

Stelling 3.5. *Er bestaat een unieke maat λ op de Borel-σ-algebra op $\mathbb{R}^d$ met de eigenschap*

$$\lambda\Big((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]\Big) = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d) \text{ voor } a_i < b_i \ (i = 1, \ldots, d).$$

Bewijs Zie Rudin [28, Theorem 2.20].

Deze maat λ heet de *[Borel-]Lebesgue-maat* op $\mathbb{R}^d$. De Lebesgue-maat is *translatie-invariant*; zie Opgave 3.2.

In Hoofdstuk 4 komen we terug op de in de Inleiding (Hoofdstuk 1) geschetste methode om Lebesgue-meetbare verzamelingen in $\mathbb{R}$ en de Lebesgue-maat daarop te definiëren. Hier dient al gezegd te worden dat we dan tot een veel grotere σ-algebra van Lebesgue-meetbare verzamelingen zullen komen dan de Borel-σ-algebra op $\mathbb{R}$.

3.3 Monotone rijen verzamelingen

Propositie 3.6. *Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Laat A_n meetbaar ($n = 1, 2, \ldots$). Dan:*

a) Als $A_1 \subset A_2$ dan $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$.

b) Als $A_1 \subset A_2$ en $\mu(A_1) < \infty$ dan $\mu(A_2 \backslash A_1) = \mu(A_2) - \mu(A_1)$.

c) $\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

d) $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu(A_n)$.

Bewijs Zie Opgave 3.4.

Propositie 3.7. *Als A_n meetbaar is voor $n = 1, 2, \ldots$ en $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ dan geldt $\mu(A_n) \to \mu\left(\bigcup_n A_n\right)$.*

Bewijs Definieer verzamelingen $B_1 = A_1$ en $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$ voor $n > 1$. De verzamelingen B_n ($n \geq 1$) zijn meetbaar en disjunct. Uit $A_n = B_1 \cup \ldots \cup B_n$ en $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$ volgt voor $n \to \infty$ dat

$$\mu(A_n) = \mu(B_1) + \cdots + \mu(B_n) \to \sum_n \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_n B_n\right) = \mu\left(\bigcup_n A_n\right). \quad \square$$

(In het bewijs is gebruik gemaakt van de σ-additiviteit van de maat μ. Waar?)

Opmerking 3.8. Als de rij (A_n) dalend is dan hoeft niet te gelden dat $\mu(A_n) \to \mu\left(\bigcap_n A_n\right)$. Zie de volgende twee voorbeelden:

1. μ is de telmaat op $\{1, 2, \ldots\}$ en $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$.

2. λ is de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}$ en $A_n = [n, \infty)$.

Als echter $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ en bovendien $\mu(A_1)$ eindig is dan geldt $\mu(A_n) \to \mu\left(\bigcap_n A_n\right)$ wel. Zie Opgave 3.5.

3.4 Regulariteit

In deze paragraaf laten we zien hoe maat en topologie samenhangen. Borel-verzamelingen in $\mathbb{R}^d$ kunnen goed benaderd worden met open verzamelingen en met gesloten verzamelingen.

Definitie 3.9. Zij μ een maat op $\mathbb{R}^d$. Een deelverzameling $A \subset \mathbb{R}^d$ heet *regulier* als er bij iedere $\varepsilon > 0$ een open verzameling $O \supset A$ bestaat en een gesloten verzameling $F \subset A$ zo dat $\mu(O \backslash F) < \varepsilon$. De maat μ op $\mathbb{R}^d$ heet *regulier* als iedere Borel-verzameling regulier is.

Stelling 3.10. *Eindige maten op $\mathbb{R}^d$ zijn regulier.*

Bewijs Bewijs achtereenvolgens de volgende beweringen (zie Opgave 3.6).

a) De Borel-σ-algebra op $\mathbb{R}^d$ wordt voortgebracht door de blokken

$$B = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \qquad (a_i < b_i,\ i = 1, \ldots, d).$$

Veronderstel in de volgende beweringen dat μ een eindige maat is op $\mathbb{R}^d$.

b) Blokken zijn regulier.

c) Als A regulier is dan ook A^c.

d) Als A_1 en A_2 regulier zijn, dan ook $A_1 \bigcup A_2$ en $A_1 \bigcap A_2$.

e) Stel $F_n \subset O_n$ en $\mu(O_n \backslash F_n) < \varepsilon_n$. Dan geldt $\mu\big((\bigcup_n O_n) \backslash (\bigcup_n F_n)\big) < \sum_n \varepsilon_n$.

f) Als $A_1, A_2, \ldots$ regulier zijn, dan is ook $\bigcup_n A_n$ regulier.

g) Eindige maten op $\mathbb{R}^d$ zijn regulier.

Stelling 3.11. *De Lebesgue-maat op $\mathbb{R}^d$ is regulier.*

Bewijs Zie Opgave 3.7.

3.5 De integraal van een niet-negatieve simpele functie

We werken in dit hoofdstuk verder steeds met een vaste maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Definitie 3.12. Een niet-negatieve simpele functie t kunnen we (ga na) uniek schrijven in de vorm

$$t = a_1 1_{A_1} + \cdots + a_q 1_{A_q} \tag{3.1}$$

met a_i verschillend en in $(0, \infty)$ en de A_i disjunct, niet-leeg en meetbaar. Dan definiëren we de *integraal* als

$$\int_X t \, d\mu := a_1 \mu(A_1) + \cdots + a_q \mu(A_q). \tag{3.2}$$

Dus dan $\int_X t \, d\mu \in [0, \infty]$.

Opmerking 3.13. Algemener kunnen we een niet-negatieve simpele functie t schrijven in de vorm (3.1) met minder eisen voor de coëfficiënten en de verzamelingen, nl. als

$$t = b_1 1_{B_1} + \cdots + b_r 1_{B_r} \text{ met } B_1, \ldots, B_r \text{ meetbaar en disjunct en } b_1, \ldots, b_r \in [0, \infty). \tag{3.3}$$

Dan is de schrijfwijze niet meer uniek, maar nog steeds geldt de versie van (3.2) die correspondeert met (3.3), nl.

$$\int_X t \, d\mu = b_1 \mu(B_1) + \cdots + b_r \mu(B_r), \tag{3.4}$$

waarbij $b_j\mu(B_j) = 0$ als $b_j = 0$ en $\mu(B_j) = \infty$ (volgens de afspraak in §2.7). Om in te zien dat (3.4) geldt voor t gegeven door (3.3), merken we op dat zowel in (3.3) als in (3.4) de termen 0 worden waarvoor $b_j = 0$ of $B_j = \emptyset$. Voor de resterende termen $b_j 1_{B_j}$ van (3.3) zal gelden dat $t(x) = b_j$ als $x \in B_j$, dus b_j is een door t aangenomen positieve waarde, dus moet gelijk zijn aan een a_i in (3.1). Door vergelijking van (3.1) met (3.3) zien we dat A_i de disjuncte vereniging is van de B_j waarvoor $b_j = a_i$. Dan is $\mu(A_i)$ de som van de $\mu(B_j)$ waarvoor $b_j = a_i$, dus (3.4) volgt uit (3.2).

In het bijzonder geldt dus:

$$\int_X 1_A \, d\mu = \mu(A) \qquad (A \in \mathcal{A}). \tag{3.5}$$

Propositie 3.14. *Laat s en t niet-negatieve simpele functies zijn. Dan:*

$$\int_X ct \, d\mu = c \int_X t \, d\mu \qquad (0 < c < \infty); \tag{3.6}$$

$$\int_X s \, d\mu \le \int_X t \, d\mu \qquad (s \le t); \tag{3.7}$$

$$\int_X (s+t) \, d\mu = \int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu. \tag{3.8}$$

Bewijs Zie Opgave 3.8 voor het bewijs van (3.6) en (3.7). Hier bewijzen we (3.8). Er zijn disjuncte meetbare verzamelingen $A_1, \ldots, A_q$ zo dat

$$s = a_1 1_{A_1} + \cdots + a_q 1_{A_q}, \quad t = b_1 1_{A_1} + \cdots + b_q 1_{A_q}$$

met $a_i, b_i \ge 0$. Dan geldt

$$\int_X (s+t) \, d\mu = \sum_{i=1}^q (a_i + b_i)\mu(A_i) = \sum_{i=1}^q a_i \mu(A_i) + \sum_{i=1}^q b_i \mu(A_i) = \int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu.$$

3.6 De integraal van een niet-negatieve meetbare functie

Definitie 3.15. Zij f meetbaar en niet-negatief op de maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$. De *integraal* van f is dan gedefinieerd door:

$$\int_X f \, d\mu := \sup_{0 \le t \le f} \int_X t \, d\mu, \tag{3.9}$$

waarbij het supremum wordt genomen over de simpele functies t met $0 \le t \le f$.

Merk op dat in het geval dat f zelf al een simpele functie ≥ 0 is, f ook behoort tot alle simpele functies t waarover in het rechterlid van (3.9) het supremum wordt genomen. Dus dan valt de nieuwe definitie van $\int_X f \, d\mu$ samen met de eerdere definitie volgens Definitie 3.12.

Propositie 3.16. *Laat f en g niet-negatieve meetbare functies zijn op $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dan:*

$$\int_X f \, d\mu \le \int_X g \, d\mu \qquad (f \le g); \tag{3.10}$$

$$\int_X cf \, d\mu = c \int_X f \, d\mu \qquad (0 \le c < \infty); \tag{3.11}$$

$$c\,\mu(\{f \ge c\}) \le \int_X f \, d\mu \quad (c > 0), \quad \textit{Ongelijkheid van Markov.} \tag{3.12}$$

Bewijs Zie Opgave 3.9.

3.7 De Stelling van de Monotone Convergentie

Uit (3.9) zien we dat $\int_X t_n\,d\mu \to \int_X f\,d\mu$ voor een zekere rij simpele functies t_n met $0 \le t_n \le f$. Uit Propositie (2.30) weten we dat $s_n \uparrow f$ voor een stijgende rij simpele functies $s_n \ge 0$. Dus de simpele functies $r_n := \max(t_1, \ldots, t_n, s_n)$ vormen een stijgende rij met $t_n \le r_n \le f$. Dus elke meetbare functie $f \ge 0$ is de limiet van een stijgende rij simpele functies r_n zo dat ook $\int_X r_n\,d\mu \uparrow \int_X f\,d\mu$.

Omgekeerd, als voor een stijgende rij van simpele functies $t_n \ge 0$ geldt dat $t_n \uparrow f$, dan is nog niet bewezen dat $\int_X t_n\,d\mu \uparrow \int_X f\,d\mu$. Dit zouden we bijvoorbeeld graag willen gebruiken om te bewijzen dat $\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$ voor $f, g \ge 0$ meetbaar (zie Propositie 3.18), maar tot dusver zouden we slechts kunnen bewijzen dat $\int_X (f+g)\,d\mu \ge \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$.

Alles blijkt goed te gaan met behulp van de Stelling van de Monotone Convergentie hieronder. Een speciaal geval van deze stelling wordt al gegeven door een herformulering van Propositie 3.7 in termen van functies: Als $1_{A_n} \uparrow 1_A$ dan geldt voor de integralen $\int_X 1_{A_n}\,d\mu \uparrow \int_X 1_A\,d\mu$.

Stelling 3.17 (Stelling van de Monotone Convergentie)**.** *Zij $f_n \colon X \to [0, \infty]$ meetbaar voor $n = 1, 2, \ldots$ en $f_1 \le f_2 \le \ldots$. Dan geldt*

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Bewijs We hebben $f_n \uparrow f$ met f meetbaar volgens Propositie 2.22. Uit de monotonie $f_n \le f_{n+1} \le f$ volgt dat

$$\int_X f_n\,d\mu \le \int_X f_{n+1}\,d\mu \le \int_X f\,d\mu.$$

Dus de rij $\left(\int_X f_n d\mu\right)$ heeft een limiet

$$L := \lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \le \int_X f\,d\mu.$$

Voor de andere ongelijkheid $\int_X f\,d\mu \le L$ is het voldoende om aan te tonen dat

$$\int_X t\,d\mu \le L \tag{$*$}$$

voor iedere simpele functie t met $0 \le t \le f$.

Neem dan zo'n simpele functie t. Die kunnen we schrijven als

$$t = \sum_{k=1}^{q} c_k 1_{A_k}$$

met $A_1, \ldots, A_q$ meetbaar en disjunct en $c_i > 0$ (groter dan 0 is hier essentieel voor het vervolg). Nu passen we een kunstgreep toe. Neem $\alpha \in (0,1)$ en definieer

$$\begin{aligned} A_{n,\alpha,k} &:= A_k \cap \{f_n > \alpha c_k\} \qquad (k = 1, \ldots, q), \\ t_{n,\alpha} &:= \sum_{k=1}^{q} \alpha c_k 1_{A_{n,\alpha,k}}. \end{aligned}$$

Dan $t_{n,\alpha} \leq f_n$. Dus

$$\sum_{k=1}^{q} \alpha c_k \mu(A_{n,\alpha,k}) = \int_X t_{n,\alpha}\, d\mu \leq \int_X f_n\, d\mu. \tag{$**$}$$

Verder geldt dat $A_{n,\alpha,k} \uparrow A_k$ als $n \to \infty$. Immers, als $x \in A_k$ dan $f_n(x) \uparrow f(x) \geq t(x) = c_k > \alpha c_k$, dus $f_n(x) > \alpha c_k$ voor n voldoende groot.

Neem nu links en rechts in de ongelijkheid ($**$) de limiet voor $n \to \infty$. Omdat $A_{n,\alpha,k} \uparrow A_k$, zal links wegens Propositie 3.7 gelden dat $\mu(A_{n,\alpha,k}) \uparrow \mu(A_k)$, dus

$$\sum_{k=1}^{q} \alpha c_k \mu(A_{n,\alpha,k}) \uparrow \sum_{k=1}^{q} \alpha c_k \mu(A_k) = \alpha \int_X t\, d\mu.$$

Het rechterlid van ($**$) heeft limiet L. Dus $\alpha \int_X t\, d\mu \leq L$. Deze laatste ongelijkheid is nu bewezen voor alle $\alpha \in (0,1)$. In de limiet $\alpha \uparrow 1$ volgt de ongelijkheid ($*$). □

3.8 Additiviteit van de integraal

Voor $f, g \geq 0$ meetbaar zullen we nu de gelijkheid (3.13) hieronder bewijzen. Zonder gebruik van de Stelling van de Monotone Convergentie zouden we $s_n \uparrow f$ en $t_n \uparrow g$ kunnen nemen zo dat $\int_X s_n\, d\mu \uparrow \int_X f\, d\mu$ en $\int_X t_n\, d\mu \uparrow \int_X g\, d\mu$. Dus dan $s_n + t_n \uparrow f + g$ en

$$\int_X (f+g)\, d\mu \geq \int_X (s_n + t_n)\, d\mu = \int_X s_n\, d\mu + \int_X t_n\, d\mu \uparrow \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu.$$

We zouden dus slechts kunnen concluderen dat $\int_X (f+g)\, d\mu \geq \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu$.

Maar met behulp van de Stelling van de Monotone Convergentie kunnen we de gelijkheid bewijzen:

Propositie 3.18. *Stel f en g zijn niet-negatief en meetbaar op $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dan geldt*

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu. \tag{3.13}$$

Bewijs Kies twee stijgende rijen niet-negatieve simpele functies $s_n \uparrow f$ en $t_n \uparrow g$. Dan geldt $s_n + t_n \uparrow f + g$. De propositie volgt met de Stelling van de Monotone Convergentie uit

$$\int_X (s_n + t_n)\, d\mu = \int_X s_n\, d\mu + \int_X t_n\, d\mu.$$ □

3.9 Het Lemma van Fatou

Stelling 3.19 (Lemma van Fatou)**.** *Zij $f_n \colon X \to [0,\infty]$ meetbaar voor $n = 1, 2, \ldots$. Dan geldt*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu. \tag{3.14}$$

Bewijs Zij $g_k := \inf_{n\geq k} f_n$. Uit $\int_X g_k\, d\mu \leq \int_X f_n\, d\mu$ voor $n \geq k$ volgt dat $\int_X g_k\, d\mu \leq \inf_{n\geq k} \int_X f_n\, d\mu$. De functies g_k zijn niet-negatief en meetbaar, en de rij (g_n) is stijgend met limiet $\liminf_{n\to\infty} f_n$. De Stelling van de Monotone Convergentie geeft

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X g_k\, d\mu \leq \lim_{k\to\infty} \left(\inf_{n\geq k} \int_X f_n\, d\mu \right) = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Voorbeeld 3.20. μ is de Lebesgue-maat op $X = [0, \infty)$, $f_n = 1_{[n,n+1)}$ voor $n = 1, 2, \ldots$. In dit geval geldt $f_n \to 0$ puntsgewijs, en

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = 0 < 1 = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

We hebben hier dus een voorbeeld waarbij de ongelijkheid (3.14) strikt is.

Het Lemma van Fatou wordt vaak toegepast als de rij (f_n) puntsgewijs convergeert naar een functie f (zie ook bovenstaand voorbeeld). Het luidt dan:

$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Oppervlakkig gezien zou je denken dat analoog aan het Lemma van Fatou voor meetbare functies $f_n \geq 0$ ook zou gelden dat

$$\int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu, \tag{3.15}$$

maar dit is in het algemeen onjuist. Voorbeeld 3.20 geeft al een tegenvoorbeeld. Wel geldt:

Propositie 3.21. *Zij $f_n \colon X \to [0, \infty)$ meetbaar voor $n = 1, 2, \ldots$ en laat er een meetbare functie $h \colon X \to [0, \infty]$ bestaan zo dat $\int h \, d\mu < \infty$ en $f_n \leq h$ voor alle n. Dan geldt ongelijkheid* (3.15).

Bewijs Zie Opgave 3.10.

Onder de voorwaarden van Propositie 3.21 hebben we dus de ongelijkheden

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu. \tag{3.16}$$

Gevolg 3.22. *Laat de functies $f_n \colon X \to [0, \infty)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ en $f \colon X \to [0, \infty)$ meetbaar zijn zo dat $f_n \to f$ puntsgewijs op X, en laat er een meetbare functie $h \colon X \to [0, \infty]$ bestaan zo dat $\int_X h \, d\mu < \infty$ en $f_n \leq h$ voor $n = 1, 2, \ldots$. Dan*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Bovenstaand gevolg is nagenoeg de Stelling van Lebesgue (Stelling 3.41) in het geval van niet-negatieve functies.

3.10 Nulverzamelingen

Definitie 3.23. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Een *nulverzameling* $N \subset X$ is een meetbare verzameling N van maat nul; een *nulfunctie* is een meetbare functie f zo dat $\{f \neq 0\}$ een nulverzameling is.

Propositie 3.24. *Iedere meetbare deelverzameling van een nulverzameling is een nulverzameling. Een aftelbare vereniging van nulverzamelingen is een nulverzameling.*

Bewijs Zie Opgave 3.11.

Voorbeeld 3.25. Voor de telmaat op $\mathbb{R}$ is alleen de lege verzameling een nulverzameling. Voor de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}$ is iedere eenpuntsverzameling een nulverzameling. (Immers $\lambda\{a\} \le \lambda(a - \frac{1}{n}, a] = \frac{1}{n} \to 0$.) Dus ook elke aftelbare deelverzameling van $\mathbb{R}$ is een nulverzameling. Bijvoorbeeld de aftelbare verzameling $\mathbb{Q}$ (dicht in $\mathbb{R}$) is een nulverzameling.

Voorbeeld 3.26. (zie Opgave 3.12) De *Cantor-verzameling* is, zoals bekend, de doorsnede $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, waarbij

$$F_n := \bigcup_{i_1,\dots,i_n \in \{0,2\}} \left[\frac{i_1}{3} + \frac{i_2}{3^2} + \cdots + \frac{i_n}{3^n}, \frac{i_1}{3} + \frac{i_2}{3^2} + \cdots + \frac{i_n}{3^n} + \frac{1}{3^n}\right].$$

C is een gesloten deelverzameling van Lebesgue-maat 0. Merk op dat C de kardinaliteit $\mathfrak{c}$ van het continuum heeft. Ook heeft C leeg inwendige, dus is een *nergens dichte* deelverzameling van $[0,1]$ (een deelverzameling waarvan de afsluiting leeg inwendige heeft).

Voorbeeld 3.27. De diagonaal $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ is een nulverzameling t.o.v. de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}^2$. Zie Opgave 3.13.

3.11 De integraal van een nulfunctie

Propositie 3.28. *Zij f een niet-negatieve meetbare functie op de maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Er geldt: f is een nulfunctie dan en slechts dan als $\int_X f\,d\mu = 0$.*

Bewijs 1) Zij f een nulfunctie. We bewijzen dat $\int_X t\,d\mu = 0$ voor iedere simpele functie t met $0 \le t \le f$. (Dan is $\int_X f\,d\mu = 0$ wegens de definitie van de integraal.) De functie t heeft de vorm $c_1 1_{A_1} + \cdots + c_q 1_{A_q}$ met $c_1, \dots, c_q > 0$ en eindig en met $A_i \subset \{f > 0\}$ en $\mu(A_i) \le \mu(\{f > 0\}) = 0$. Hieruit volgt $\int_X t\,d\mu = 0$.
2) Stel $\int_X f\,d\mu = 0$. Zij $A_n = \{f \ge 1/n\}$. Dan geeft de Ongelijkheid van Markov (3.12) dat

$$\tfrac{1}{n}\,\mu(A_n) \le \int_X f\,d\mu = 0.$$

Dus $\mu(A_n) = 0$ voor $n = 1, 2, \dots$. Uit $\{f > 0\} = \bigcup_n A_n$ (ga na), volgt dat $\mu(\{f > 0\}) \le \sum \mu(A_n) = 0$. Dus f is een nulfunctie. □

Gevolg 3.29. *Laat f en g niet-negatieve meetbare functies zijn. Als $\{f \ne g\}$ een nulverzameling is, dan geldt $\int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu$.*

Bewijs Zie Opgave 3.14.

3.12 De relatie "bijna overal"

Definitie 3.30. Twee meetbare functies f en g op een maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ zijn *bijna overal* gelijk als $\{f \ne g\}$ een nulverzameling is.

Algemener geldt op een maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dat een van $x \in X$ afhankelijke bewering $P(x)$ *bijna overal* geldt als $P(x)$ waar is voor x buiten een zekere nulverzameling N.

In plaats van "bijna overal" schrijven we b.o. of μ-b.o. (in het Engels *almost everywhere* of a.e.).

Als μ een kansmaat is en we de kansinterpretatie willen benadrukken, dan spreken we van *bijna zeker* (b.z.), *almost surely* (a.s.) i.p.v. "bijna overal", "almost everywhere".

Verdere voorbeelden zijn o.a.:

- Een meetbare functie is b.o. eindig als $\{|f| = \infty\}$ een nulverzameling is.
- De rij functies (f_n) convergeert b.o. naar een functie f als $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ voor x buiten een zekere nulverzameling.

Merk op dat bij sommige beweringen $P(x)$ de verzameling $E := \{P(x) \text{ onwaar}\}$ altijd meetbaar is, dus dan is P b.o. waar precies als E een nulverzameling is. Dit geldt bijvoorbeeld voor de eigenschap $P(x) := \big(f(x) = g(x)\big)$ met f en g meetbaar. In andere gevallen, waar $E := \{P(x) \text{ onwaar}\}$ niet noodzakelijk meetbaar is, zal P b.o. gelden als $E \subset N$ voor een nulverzameling N.

Propositie 3.31. *In de verzameling van meetbare functies is de relatie "$f = g$ b.o." een equivalentierelatie.*

Bewijs Zie Opgave 3.15.

Merk op dat volgens Gevolg 3.29 de integraal $\int_X f\,d\mu$ alleen van de equivalentieklasse van f afhangt bij de equivalentierelatie in Propositie 3.31 (voorzover $f \geq 0$ en meetbaar).

Propositie 3.32. *Zij $f \geq 0$ een meetbare functie met $\int_X f\,d\mu < \infty$. Dan is f b.o. eindig.*

Bewijs Zie Opgave 3.16.

3.13 Reëelwaardige integreerbare functies

Voor een meetbare functie f met waarden in $[-\infty, \infty]$ is

$$|f| = f^+ + f^- \quad \text{dus} \quad \int_X |f|\,d\mu = \int_X f^+\,d\mu + \int_X f^-\,d\mu.$$

Dus $\int_X |f|\,d\mu$ is eindig precies als de integralen $\int_X f^+\,d\mu$ en $\int_X f^-\,d\mu$ eindig zijn.

Definitie 3.33. Een meetbare functie $f\colon X \to [-\infty, \infty]$ op $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heet *integreerbaar* als $\int_X |f|\,d\mu < \infty$. Dan definiëren we de *integraal* van f door

$$\int_X f\,d\mu := \int f^+\,d\mu - \int_X f^-\,d\mu.$$

Propositie 3.34. *Laat $f, g\colon X \to [-\infty, \infty]$ integreerbare functies zijn op $(X, \mathcal{A}, \mu)$ met $f \leq g$ en laat $c \in \mathbb{R}$. Dan is $c\,f$ integreerbaar,*

$$\int_X c\,f\,d\mu = c\int_X f\,d\mu \quad \textit{en} \tag{3.17}$$

$$\int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu. \tag{3.18}$$

Bewijs Zie Opgave 3.18.

Propositie 3.35. *Als $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ integreerbare functies zijn, dan is ook $f+g$ integreerbaar en*

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu.$$

Bewijs De integreerbaarheid van $f+g$ volgt uit $|f+g| \leq |f| + |g|$ (ga na). Nu zal

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X (f+g)^+\, d\mu - \int_X (f+g)^-\, d\mu.$$

Omdat $f+g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$ met $f^+ + g^+ \geq 0$ en $f^- + g^- \geq 0$, zal $f^+ + g^+ = (f+g)^+ + h$ en $f^- + g^- = (f+g)^- + h$ met $h \geq 0$ (zie Opgave 2.9). Dan zal h ook meetbaar zijn als het verschil van de meetbare functies $f^+ + g^+$ en $(f+g)^+$ en h zal integreerbaar zijn omdat $0 \leq h \leq f^+ + g^+$. Dus met herhaald gebruik van Propositie 3.18:

$$\begin{aligned}
\int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu &= \int_X f^+\, d\mu + \int_X g^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu - \int_X g^-\, d\mu \\
&= \int_X (f^+ + g^+)\, d\mu - \int_X (f^- + g^-)\, d\mu \\
&= \int_X ((f+g)^+ + h)\, d\mu - \int_X ((f+g)^- + h)\, d\mu \\
&= \int_X (f+g)^+\, d\mu + \int_X h\, d\mu - \int_X (f+g)^-\, d\mu - \int_X h\, d\mu \\
&= \int_X (f+g)^+\, d\mu - \int_X (f+g)^-\, d\mu = \int_X (f+g)\, d\mu. \quad \square
\end{aligned}$$

Gevolg 3.36. *Voor een reëelwaardige integreerbare functie f geldt*

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu. \tag{3.19}$$

Bewijs Zie Opgave 3.19.

3.14 Complexwaardige integreerbare functies

Voor een complexwaardige meetbare functie $f = u + iv$ ($u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$) geldt dat $|u| \leq |f|$, $|v| \leq |f|$ en $|f| \leq |u| + |v|$. Dus $\int_X |f|\, d\mu$ is eindig precies als $\int_X |u|\, d\mu$ en $\int_X |v|\, d\mu$ eindig zijn, d.w.z. precies als u en v integreerbaar zijn.

Definitie 3.37. Een meetbare functie $f = u + iv\colon X \to \mathbb{C}$ op $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heet *integreerbaar* als $\int_X |f|\, d\mu < \infty$. Dan definiëren we de *integraal* van f door

$$\int_X f\, d\mu := \int_X u\, d\mu + i \int_X v\, d\mu.$$

Stelling 3.38. *De complexwaardige integreerbare functies op een maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vormen een complexe lineaire ruimte en de integraal $f \mapsto \int_X f\, d\mu$ is een lineaire functionaal op deze ruimte (d.w.z. een lineaire afbeelding naar $\mathbb{C}$).*

Bewijs Dat $f+g$ en $c\,f$ integreerbaar zijn als f, g integreerbaar zijn en $c \in \mathbb{C}$ volgt uit $|f+g| \leq |f| + |g|$ en $|c\,f| = |c|\,|f|$ (ga na). Dat

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$$

als f, g integreerbaar, volgt onmiddellijk uit Definitie 3.37 en Propositie 3.35. Tenslotte volgt ook door uitschrijven dat

$$\int_X c\,f\,d\mu = c\int_X f\,d\mu. \quad \square$$

Propositie 3.39. *Voor een complexwaardige integreerbare functie f geldt*

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu. \tag{3.20}$$

Bewijs Er geldt voor zekere $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\left|\int_X f\,d\mu\right| = e^{-i\theta}\int_X f\,d\mu = \int_X e^{-i\theta} f\,d\mu = \int_X \mathrm{Re}\,(e^{-i\theta} f)\,d\mu \leq \int_X |f|\,d\mu.$$

Hier geldt de derde gelijkheid omdat het linkerlid daarvan reëel is. De laatste ongelijkheid geldt omdat $\mathrm{Re}\,(e^{-i\theta} f) \leq |f|$. $\square$

Propositie 3.39 volgt ook uit een algemenere ongelijkheid voor de integraal van een vectorwaardige functie:

Propositie 3.40. *Als $f_1, \ldots, f_d$ integreerbare reëelwaardige functies zijn, dan is de functie $\|f\|$ met $f = (f_1, \ldots, f_d)$ integreerbaar en er geldt*

$$\left\|\int_X f\,d\mu\right\| \leq \int_X \|f\|\,d\mu.$$

De integraal links is componentsgewijs gedefinieerd: $\int_X f\,d\mu$ is de vector met componenten $\int_X f_i\,d\mu$.

Bewijs Zij $a = (a_1, \ldots, a_d)$ met $a_i = \int_X f_i\,d\mu$, en schrijf $a = \|a\|\,u$ met u een eenheidsvector. Dan geldt dat

$$\left\|\int_X f\,d\mu\right\| = \|a\| = \langle u, a\rangle = \int_X \sum_{i=1}^d u_i f_i\,d\mu \leq \int_X \|f\|\,d\mu,$$

omdat $\langle u, p\rangle \leq \|p\|$ voor elke $p \in \mathbb{R}^d$, dus ook voor $p = f(x)$. Gebruik vervolgens (3.18). $\square$

3.15 Gemajoreerde convergentie

We keren nu terug naar de vraag: onder welke voorwaarden volgt uit puntsgewijze convergentie van de functies f_n naar een functie f convergentie van de integralen: $\int_X f_n\,d\mu \to \int_X f\,d\mu$?

Als $f_n \geq 0$ en de rij $(f_n(x))$ stijgend is voor iedere x dan convergeert de rij van integralen $\int_X f_n\,d\mu$ naar de integraal van de limietfunctie (Stelling van de Monotone Convergentie). Laten we de monotonie vallen, dan houden we slechts een ongelijkheid over (Fatou):

$$\int_X f\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu,$$

en hierbij kan strikte ongelijkheid optreden, zelfs al is de rij $(\int_X f_n\,d\mu)$ constant.

De Stelling van Lebesgue, die we nu zullen behandelen, geeft een voldoende voorwaarde voor convergentie $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$: de rij van functies $|f_n|$ moet gemajoreerd worden door een integreerbare functie h.

De Stelling van Lebesgue (ook wel *Stelling van de Gemajoreerde Convergentie*, in het Engels *Dominated Convergence Theorem*) is één van de meest gebruikte stellingen in de analyse.

De voorwaarde van gemajoreerde convergentie is eenvoudig maar toch zeer flexibel. Het is de kunst om bij een gegeven rij (f_n) een majorant h te vinden waarvan *duidelijk* is dat de integraal $\int_X h \, d\mu$ eindig is. (Als er zo'n majorant is dan zal de minimale majorant $\sup_n |f_n|$ zeker ook eindige integraal hebben, maar dat is aan de minimale majorant vaak moeilijk te zien.)

In de Stelling van Lebesgue is de voorwaarde wel voldoende, maar niet noodzakelijk. Er bestaan verscherpingen, maar in de praktijk blijkt dat de Stelling van Lebesgue in zeer veel gevallen toe te passen is.

3.16 De Stelling van Lebesgue

Stelling 3.41 (Stelling van Lebesgue, Stelling van de Gemajoreerde Convergentie)**.** *Stel dat de rij complexwaardige meetbare functies (f_n) op de maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bijna overal convergeert naar een complexwaardige meetbare functie f. Stel bovendien dat er een integreerbare functie $h\colon X \to [0, \infty]$ (dus $\int_X h \, d\mu < \infty$) bestaat zo dat*

$$|f_n| \leq h \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Dan zijn f_n en f integreerbaar en er geldt dat

$$\int_X |f - f_n| \, d\mu \to 0 \tag{3.21}$$

en

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu. \tag{3.22}$$

Bewijs Eerst nemen we aan dat $f_n(x) \to f(x)$ voor alle $x \in X$. Dan geldt $|f(x)| \leq h(x)$ voor alle $x \in X$ en is f dus integreerbaar. We passen Gevolg 3.22 van het Lemma van Fatou toe op de functies $2h - |f - f_n|$, waarvoor geldt:

$$0 \leq 2h - |f - f_n| \leq 2h \quad \text{en} \quad 2h - |f - f_n| \to 2h.$$

Dus Gevolg 3.22 geeft dat

$$\int_X 2h \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (2h - |f - f_n|) \, d\mu = \int_X 2h \, d\mu - \lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \, d\mu,$$

waaruit (3.21) direct volgt. Dan volgt (3.22) uit (3.21) met behulp van ongelijkheid (3.20):

$$\left| \int_X f \, d\mu - \int_X f_n \, d\mu \right| = \left| \int_X (f - f_n) \, d\mu \right| \leq \int_X |f - f_n| \, d\mu \to 0.$$

Hiermee is de stelling bewezen in het geval dat $f_n \to f$ overal.

In het algemene geval dat $f_n \to f$ b.o. kiezen we een nulverzameling N zo dat $f_n(x) \to f(x)$ voor $x \notin N$. Definieer $\widetilde{f}$ en $\widetilde{f_n}$ door de functies gelijk te nemen aan f en f_n buiten N en nul op

N. Dan geldt de stelling voor $\widetilde{f}$ en $\widetilde{f}_n$. Dus $\int_X |\widetilde{f}_n - \widetilde{f}|\, d\mu \to 0$ en $\int_X \widetilde{f}\, d\mu \to \int_X \widetilde{f}_n\, d\mu$. Deze relaties gelden dan ook voor f_n en f omdat de verschillen $|f_n - f|1_N$, $f_n 1_N$ en $f 1_N$ nulfuncties zijn. $\square$

Een direct gevolg van de Stelling van Lebesgue is:

Gevolg 3.42 (Stelling van de Begrensde Convergentie)**.** *Stel de rij complexwaardige meetbare functies* (f_n) *op de maatruimte* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *met* **eindige** *maat* μ *convergeert bijna overal naar een complexwaardige meetbare functie* f. *Als er een reële constante* $c > 0$ *bestaat zo dat* $|f_n| \leq c$ *voor alle* n, *dan is* f *integreerbaar en* $\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu$.

Het was deze stelling van de begrensde convergentie die door Lebesgue werd bewezen in zijn proefschrift in 1902. Vervolgens werden in 1906, onafhankelijk van elkaar, de Stelling van de Monotone Convergentie en het Lemma van Fatou bewezen door Beppo Levi respectievelijk Fatou. Tenslotte publiceerde Lebesgue zijn Stelling van de Gedomineerde Convergentie in 1908 en 1910. Zie Choksi [6] of een korte samenvatting op een webpagina [5].

3.17 Opgaven

Opgave 3.1. Bewijs dat eigenschap a) in Definitie 3.1 volgt uit eigenschap b) als er een meetbare verzameling met eindige maat is. Welke andere waarde zou $\mu(\emptyset)$ kunnen hebben op grond van b) zonder dit gegeven?

Opgave 3.2. Bewijs dat de Lebesgue-maat λ op $\mathbb{R}^d$ *translatie-invariant* is, d.w.z. dat, als E meetbaar is en $a \in \mathbb{R}^d$, dan $\lambda(E + a) = \lambda(E)$, waarbij $E + a := \{x + a \mid x \in E\}$.

Opgave 3.3. Zij λ Lebesgue-maat op $\mathbb{R}$. Construeer voor elke $\varepsilon \in (0, 1)$ een open deelverzameling $E \subset [0, 1]$ die dicht is in $[0, 1]$ en waarvoor $\lambda(E) = \varepsilon$.

Opgave 3.4. Bewijs Propositie 3.6.

Opgave 3.5. Zij (A_n) een rij meetbare verzamelingen met $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ en $\mu(A_1) < \infty$. Dan $\mu(A_n) \to \mu\left(\bigcap_n A_n\right)$.

Opgave* 3.6. Werk het bewijs van Stelling 3.10 uit.

Opgave* 3.7. Bewijs Stelling 3.11.

Opgave 3.8. Bewijs (3.6) en (3.7).

Opgave 3.9. Bewijs (3.10), (3.11) en (3.12).

Opgave 3.10. Bewijs Propositie 3.21 met behulp van het Lemma van Fatou.

Opgave 3.11. Bewijs Propositie 3.24.

Opgave 3.12. Bewijs dat de Cantor-verzameling Lebesgue-maat 0 heeft (zie Voorbeeld 3.26).

Opgave 3.13. Bewijs de bewering in Voorbeeld 3.27.

Opgave 3.14. Bewijs Gevolg 3.29.

Opgave 3.15. Bewijs Propositie 3.31.

Opgave 3.16. Bewijs Propositie 3.32.

Opgave 3.17. Stel $f_n \geq 0$ is meetbaar voor $n = 0, 1, 2, \ldots$ en $f_n \to f_0$ b.o.. Bewijs dat $\int_X f_0 \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$.

Opgave 3.18. Bewijs Propositie 3.34. Maak voor het bewijs van (3.17) onderscheid tussen de gevallen $c > 0$, $c < 0$ en $c = 0$. Bewijs i.v.m. (3.18) eerst dat $f^+ \leq g^+$ en $f^- \geq g^-$ als $f \leq g$.

Opgave 3.19. Bewijs Gevolg 3.36.

Opgave 3.20. Zij μ een eindige maat op $\mathbb{R}^d$. Definieer

$$\phi(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x\rangle} \, d\mu(x) \qquad (\xi \in \mathbb{R}^d).$$

Bewijs dat ϕ continu is op $\mathbb{R}^d$. (De functie ϕ heet de *Fourier-getransformeerde* van μ, ook wel de *karakteristieke functie* van μ.)

Opgave 3.21. Zij $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ integreerbaar t.o.v. de Lebesgue-maat λ op $\mathbb{R}^3$. Zij $B(y)$ de open bol met middelpunt y in $\mathbb{R}^3$ en met straal 1. Definieer

$$g(y) = \frac{3}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} 1_{B(y)} f \, d\lambda.$$

Dit is het gemiddelde van de functie f over de bol $B(y)$. Bewijs dat de functie g continu is op $\mathbb{R}^3$. Bewijs ook dat g nul wordt in oneindig, d.w.z. dat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een $R > 0$ is zo dat $|g(y)| < \varepsilon$ als $\|y\| \geq R$.

Opgave 3.22. Bewijs de volgende generalisatie van de Stelling van Lebesgue: laat f_n integreerbare complexwaardige functies zijn op de maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$ die μ-b.o. convergeren naar de meetbare functie f, en laat $h_n \geq 0$ meetbare functies zijn op $(X, \mathcal{A}, \mu)$ die μ-b.o. convergeren naar de integreerbare functie $h \geq 0$. Stel

$$|f_n| \leq h_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Als $\int_X h_n \, d\mu \to \int_X h \, d\mu$ dan ook $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$.

Opgave 3.23. Laat $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte zijn en μ, ν maten op $\mathcal{A}$. Veronderstel dat $\mu \geq \nu$, d.w.z. dat voor iedere $A \in \mathcal{A}$ geldt dat $\mu(A) \geq \nu(A)$.

a) Neem aan dat $\mu(X) < \infty$. Bewijs dat er precies één maat λ op $\mathcal{A}$ bestaat met $\mu = \lambda + \nu$, d.w.z. dat voor iedere $A \in \mathcal{A}$ geldt dat $\mu(A) = \lambda(A) + \nu(A)$.

b) Laat zien dat zo'n λ ook bestaat als niet gegeven is dat $\mu(X) < \infty$. Ga hierbij zorgvuldig te werk!

c) Laat zien dat λ in het algemeen niet uniek hoeft te zijn. Onderzoek onder welke voorwaarden uniciteit zal optreden.

Opgave 3.24. Laat $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte zijn en μ een eindige maat op $\mathcal{A}$. Zij $\{E_n\}$ een rij van meetbare verzamelingen zo dat

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k.$$

Noem de verzameling gegeven door linker- en rechterlid E. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$ bestaat en gelijk is aan $\mu(E)$.

Opgave 3.25. Laat $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte zijn en μ een maat op $\mathcal{A}$. Gegeven is dat het complement van iedere $A \in \mathcal{A}$ met $\mu(A) = \infty$ eindige maat heeft. Bewijs dat $c := \sup_{\mu(A)<\infty} \mu(A)$ eindig is en dat er een $B \in \mathcal{A}$ is met $\mu(B) = c$.

4 Toepassingen

Dit hoofdstuk bevat een aantal toepassingen van de theorie uit Hoofdstuk 3, i.h.b. van de Stelling van Lebesgue. De belangrijkste resultaten zijn:

1. Som en integraal mogen verwisseld worden bij reeksen van niet-negatieve functies en ook als $\sum_n \int |f_n|\, d\mu$ eindig is.

2. Zij X een metrische ruimte en $(Y, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. De integraal

$$F(x) = \int_Y f(x, y)\, d\mu(y) \tag{4.1}$$

is continu in x als f continu is in x voor elke $y \in Y$ mits er een μ-integreerbare majorant $h\colon Y \to [0, \infty]$ voor f bestaat. Voor X een interval in $\mathbb{R}$ is de integraal (4.1) continu differentieerbaar in x als f continu differentieerbaar is in x voor iedere $y \in Y$, mits de integraal F bestaat en er een μ-integreerbare majorant $h : Y \to [0, \infty]$ bestaat voor $\frac{\partial f}{\partial x}$.

3. De Riemann-integraal en de Lebesgue-integraal stemmen overeen voor continue functies $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Dit geldt ook voor Riemann-integreerbare functies $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, maar dan moeten we de Borel-σ-algebra op $[a, b]$ eerst completeren. Een Riemann-integreerbare functie hoeft niet Borel-meetbaar te zijn!

4.1 Verwisselen van som en integraal

Propositie 4.1. *Zij (f_n) een rij meetbare functies ≥ 0 op de maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dan geldt:*

$$\int_X \left(\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k\, d\mu.$$

Bewijs Uit Propositie 3.18 volgt direct dat

$$\int_X \left(\textstyle\sum_{k=1}^{n} f_k\right) d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_X f_k\, d\mu.$$

Neem dan links en rechts de limiet voor $n \to \infty$ en pas de Stelling van de Monotone Convergentie (Stelling 3.17) toe op de stijgende rij van functies $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$. $\square$

Stelling 4.2. *Zij (f_n) een rij complexwaardige integreerbare functies op de maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Laat verder gegeven zijn dat*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |f_k|\, d\mu < \infty. \tag{4.2}$$

Dan bestaat er een complexwaardige integreerbare functie s zo dat

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = s \quad \text{b.o.}, \tag{4.3}$$

en er geldt:

$$\int_X |f_1 + \cdots + f_n - s|\, d\mu \to 0 \qquad \text{en} \qquad \int_X s\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k\, d\mu,$$

waarbij de laatste oneindige reeks absoluut convergent is.

Bewijs Uit (4.2) en Propositie 4.1 volgt dat

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^\infty |f_k| \right) d\mu < \infty.$$

Uit Propositie 3.32 volgt dan dat $\sum_{k=1}^\infty |f_k| < \infty$ b.o., dus $\sum_{k=1}^\infty f_k$ convergeert absoluut b.o., dus $\sum_{k=1}^\infty f_k$ convergeert buiten een zekere nulverzameling N. Definieer dan de functie s door

$$s(x) := \begin{cases} \sum_{k=1}^\infty f_k(x), & x \notin N, \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

Deze voldoet aan (4.3). De Stelling van Lebesgue toegepast op de rij van functies $s_n := f_1 + \cdots + f_n$ met de majorant $\sum_{n=1}^\infty |f_n|$ toont aan dat s integreerbaar is en dat

$$\int_X |f_1 + \cdots + f_n - s| \, d\mu \to 0 \qquad \text{en} \qquad \int_X \left(\sum_{k=1}^n f_k \right) \to \int_X s \, d\mu.$$

Dus

$$\int_X s \, d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_X f_k \, d\mu \qquad \text{en} \qquad \sum_{k=1}^\infty \left| \int_X f_k \, d\mu \right| \leq \sum_{k=1}^\infty \int_X |f_k| \, d\mu < \infty \qquad \square$$

Opmerking 4.3. Men kan sommatie opvatten als integratie t.o.v. de telmaat op de verzameling $\{1, 2, \ldots\}$ van de natuurlijke getallen. Dan is Stelling 4.2 hierboven een speciaal geval van de Stelling van Fubini (zie Hoofdstuk 6).

4.2 Continuïteit van de integraal

We zullen hieronder integralen van Riemann-integreerbare functies op begrensde intervallen schrijven in de notatie van de Riemann-integraal, dus $\int_a^b f(x)\,dx$, ook al bedoelen we de Lebesgue-integraal. Dit is gerechtvaardigd omdat de Riemann-integraal gelijk is aan de Lebesgue-integraal (zie §4.6).

Voor sommige topologische ruimten is rijtjes-continuïteit hetzelfde als continuïteit. Dit geldt in het bijzonder voor metrische ruimten. Er geldt dan:
De functie $f : X \to \mathbb{C}$ is continu in x_0 dan en slechts dan als $f(x_n) \to f(x_0)$ voor iedere rij $x_n \to x_0$.

Stelling 4.4 (Continuïteitsstelling). *Zij X een metrische ruimte en $(Y, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Laat $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$ continu zijn op X voor vaste $y \in Y$ en meetbaar op Y voor vaste $x \in X$. Als er een integreerbare functie $h \geq 0$ op Y bestaat zo dat*

$$|f(x,y)| \leq h(y) \qquad ((x,y) \in X \times Y) \tag{4.4}$$

dan is de functie $x \mapsto F(x) := \int_Y f(x,y)\, d\mu(y)$ continu op X, en begrensd.

Bewijs Stel $x_n \to x_0 \in X$. Pas de Stelling van Lebesgue toe met majorant h op de rij functies $y \mapsto f_n(y) = f(x_n, y)$. $\square$

Opmerking 4.5. Het bewijs is korter dan de stelling. In veel gevallen is het bewijs wel toe te passen, en de stelling niet!

Bijvoorbeeld kan het voorkomen dat we geen integreerbare majorant h kunnen vinden zo dat (4.4) geldt op $X \times Y$, maar wel open deelverzamelingen X_n van X zo dat $\bigcup_n X_n = X$ en (4.4) geldt op $X_n \times Y$ met h vervangen door een integreerbare functie h_n. Dan is F continu op X_n voor elke n, dus toch continu op X.

Voorbeeld 4.6. Bekijk voor $x > 0$ de integraal

$$F(x) := \int_0^\infty ye^{-xy}\,dy := \lim_{M\to\infty} \int_0^M ye^{-xy}\,dy.$$

We hebben hier een oneigenlijke Riemann-integraal met integrand ≥ 0. Deze integraal is eindig voor elke $x > 0$ (ga na). In §4.6 zal aangetoond worden dat deze integraal dan ook gelijk is aan de Lebesgue-integraal $\int_{[0,\infty)} ye^{-xy}\,d\lambda(y)$.

Omdat $\sup_{x>0} ye^{-xy} = y$ en $\int_0^\infty y\,dy = \infty$, heeft de integrand geen integreerbare majorant die majoreert voor $x \in (0, \infty)$. Maar voor $\varepsilon > 0$ geldt voor $x \in (\varepsilon, \infty)$ dat $ye^{-xy} \leq h_\varepsilon(y) := ye^{-\varepsilon y}$ en h_ε is integreerbaar op $[0, \infty)$ (ga na). Dus volgens Opmerking 4.5 kunnen we Stelling 4.4 toch gebruiken om te concluderen dat F continu is op $(0, \infty)$.

Voorbeeld 4.7. Stel $f\colon [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ is continu. Dan is $F(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$ continu op $[a, b]$ en $G(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$ is continu op $[c, d]$.
Inderdaad, $[a, b]\times[c, d]$ is compact dus f is begrensd, zeg $|f(x, y)| \leq M$ voor $(x, y) \in [a, b]\times[c, d]$. Dan is $h \equiv M$ een integreerbare majorant.

Voorbeeld 4.8. De functie

$$f(x, y) = \frac{x - y}{(x + y)^3} \qquad (0 < x \leq 1,\ 0 < y < 1)$$

is continu en de integraal

$$F(x) := \int_0^1 f(x, y)\,dy = -\frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x + 1)^2} + \frac{1}{x + 1}$$

is continu op $(0, 1]$. Ga na dat dit niet uit Stelling 4.4 kan volgen met een majorant op $(0, 1)$, wel met een majorant op $(\varepsilon, 1)$ voor elke $\varepsilon > 0$.

4.3 Differentiëren onder het integraalteken

Neem nu in de continuïteitsstelling (Stelling 4.4) voor de metrische ruimte X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^d$ en veronderstel dat f voor vaste $x \in X$ integreerbaar is op Y. Dan kunnen we het differentiequotiënt

$$\frac{F(x + te_i) - F(x)}{t} = \int_Y \frac{f(x + te_i, y) - f(x, y)}{t}\,d\mu(y)$$

opschrijven, waarbij e_i de i-de basisvector is in $\mathbb{R}^d$, $x \in X$ en $t \in \mathbb{R}$ zo klein dat $x + te_i \in X$. Stel dat de partiële afgeleide $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x_i}$ bestaat in ieder punt $(x, y) \in X \times Y$ en dat er een integreerbare functie $h_i \geq 0$ op Y bestaat zo dat

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i} f(x, y)\right| \leq h_i(y) \qquad ((x, y) \in X \times Y). \tag{4.5}$$

Volgens de middelwaardestelling geldt dan voor vaste $x \in X$ dat

$$\left|\frac{f(x + te_i, y) - f(x, y)}{t}\right| \leq h_i(y) \qquad (y \in Y),$$

tenminste als $t \neq 0$ zo klein is dat het interval met eindpunten x en $x+te_i$ geheel in X ligt. Neem nu een rij $t_n \to 0$, $t_n \neq 0$. Uit de Stelling van Lebesgue (met $f_n(y) = (f(x+t_n e_i, y) - f(x,y))/t_n$ en majorant h) volgt dan dat

$$\frac{F(x+t_n e_i) - F(x)}{t_n} \to \int_Y \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_i}\, d\mu(y).$$

Stelling 4.9 (Differentiatiestelling)**.** *Zij $(Y, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en X een open deelverzameling in $\mathbb{R}^d$. Zij $i \in \{1, \ldots, d\}$. Zij $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ partieel differentieerbaar naar x_i in elk punt $(x,y) \in X \times Y$ en integreerbaar op Y voor elke vaste $x \in X$. Als er een integreerbare functies h_i op Y bestaat zo dat* (4.5) *geldt dan is*

$$F(x) := \int_Y f(x,y)\, d\mu(y)$$

partieel differentieerbaar naar x_i in elk punt $x \in X$ en $y \mapsto \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_i}$ is integreerbaar en

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_Y \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_i}\, d\mu(y). \tag{4.6}$$

Als de partiële afgeleide $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x_i}$ bovendien continu is op X voor elke $y \in Y$, dan is $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ continu op X. Als f continu differentieerbaar is op X voor elke $y \in Y$ en de majorering (4.5) *geldt voor elke i dan is F continu differentieerbaar op X (dus ook continu op X).*

Bewijs De formule voor $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ is al bewezen. Merk op dat tegelijk ook is aangetoond dat $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x_i}$ voor vaste $x \in X$ een meetbare functie is op $(Y, \mathcal{E})$. Ook is $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x_i}\right| \leq h_i(y)$, dus als $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x_i}$ continu is in x voor elke y dan volgt de continuïteit van $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$ uit (4.6) en Stelling 4.4. $\square$

Opmerking 4.10. We zullen Stelling 4.9 het meest toepassen als $d = 1$, dus als X een open interval in $\mathbb{R}$ is. Het interval mag ook gesloten of half gesloten/half open zijn (neem dan linker of rechter afgeleide in een randpunt van het interval). Ook kan het voorkomen dat de majorering op X niet lukt, maar wel op deelintervallen X_n zo dat $X = \bigcup_n X_n$ (vergelijk dit met Opmerking 4.5). Merk ook op dat differentiatie een *lokale* operatie is, waardoor het voldoende is om te bewijzen dat elk punt $x_0 \in X$ een omgeving heeft waarop we de differentiatiestelling mogen toepassen.

Voorbeeld 4.11. Zij μ een eindige maat op de Borel-σ-algebra op $[0, \infty)$. Definieer

$$F(x) := \int_0^\infty e^{-xy}\, d\mu(y) \qquad (x \geq 0).$$

Dan geldt

$$F'(x) = -\int_0^\infty y e^{-xy}\, d\mu(y) \qquad (x > 0). \tag{4.7}$$

De functie F heet de *Laplace-getransformeerde* van de maat μ.

Bewijs Zij $\varepsilon > 0$. We zullen bewijzen dat (4.7) geldt op $\varepsilon < x < \infty$. Het is duidelijk dat e^{-xy} μ-integreerbaar is in y voor elke $x \geq 0$. We zoeken een majorant $h(y)$ voor de functie $y \mapsto ye^{-xy}$ die werkt voor elke $x > \varepsilon$. Het blijkt dat we voor h een constante kunnen nemen, $h \equiv M$ met

M afhankelijk van ε. Immers, de functie $ye^{-\varepsilon y}$ is continu op $[0, \infty)$ en $ye^{-\varepsilon y} \to 0$ voor $y \to \infty$. Dus er bestaat een constante M zo dat

$$0 \leq ye^{-\varepsilon y} \leq M \qquad (y \geq 0).$$

Dan geldt zeker $0 \leq ye^{-xy} \leq M$ voor $x \geq \varepsilon$, $y \geq 0$.

De functie $h \equiv M$ is integreerbaar t.o.v. μ. De differentiatiestelling geeft nu

$$F'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} e^{-xy} \, d\mu(y) = -\int_0^\infty ye^{-xy} \, d\mu(y) \qquad (x > \varepsilon).$$

Omdat $\varepsilon > 0$ willekeurig is, geldt deze formule voor elke $x > 0$. □

Merk op dat een integreerbare majorant h van de afgeleide $-ye^{-xy}$ die werkt voor elke $x > 0$ niet hoeft te bestaan. Immers, als $h(y) \geq ye^{-xy}$ voor alle $x > 0$ dan $h(y) \geq y$, en de functie y hoeft niet integreerbaar te zijn t.o.v. de maat μ.

We blijken de integreerbaarheid van f op Y in Stelling 4.9 slechts voor één punt $x \in X$ te hoeven eisen als X samenhangend is:

Stelling 4.12. *Zij $X \subset \mathbb{R}^d$ een samenhangende open verzameling, en zij $(Y, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Laat de functie $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ voor elke $x \in X$ meetbaar zijn op Y, en voor elke $y \in Y$ continu differentieerbaar op X. Veronderstel verder:*

1. *Er is een punt $a \in X$ zodat $y \mapsto f(a, y)$ integreerbaar is t.o.v. μ;*
2. *Er bestaat een integreerbare functie $h : Y \to [0, \infty]$ die de partiële afgeleiden van f majoreert, d.w.z.: voor $i = 1, \ldots, d$ geldt*

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(x, y) \right| \leq h(y) \qquad ((x, y) \in X \times Y). \tag{4.8}$$

Dan bestaat voor iedere $x \in X$ de integraal $F(x) = \int_Y f(x, y) \, d\mu(y)$. De functie F is continu differentieerbaar op X, en men mag onder het integraalteken differentiëren:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_Y \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_i} \, d\mu(y). \tag{4.9}$$

Bewijs Zij $x \in X$. Er bestaat een kromme Γ opgebouwd uit een eindig aantal lijnstukken parallel aan de coordinaatassen die de punten x en a verbindt, en die geheel binnen X verloopt. Zij L de lengte van Γ. Dan geldt

$$|f(x, y)| \leq |f(a, y)| + L|h(y)|.$$

Omdat $y \mapsto f(a, y)$ en h integreerbaar zijn, geldt dit ook voor $y \mapsto f(x, y)$, en wel voor iedere $x \in X$. Het verdere bewijs verloopt zoals in Stelling 4.9. □

4.4 Completering van maatruimten

Als een rij meetbare functies f_n puntsgewijs convergeert naar een functie f dan is de limietfunctie f ook meetbaar. Bij b.o. convergentie van (f_n) naar f hoeft dit niet het geval te zijn, en moeten we de meetbaarheid van f apart eisen, omdat f dan geheel willekeurig genomen kan worden op de nulverzameling N waar (f_n) niet convergeert. Maar er zijn voorbeelden van een nulverzameling N (bijvoorbeeld in $[0, 1]$ met de Borel-σ-algebra en de Borel-Lebesgue-maat) waar niet elke deelverzameling van N Borel-meetbaar is, dus niet elke functie op N een Borel-meetbare functie is. Dit probleem verdwijnt als we alle deelverzamelingen van nulverzamelingen meetbaar verklaren, en deze deelverzamelingen de maat nul toekennen.

Definitie 4.13. Een maatruimte is *volledig* als iedere deelverzameling van een nulverzameling meetbaar is.

Propositie 4.14. *Stel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ is volledig. Als de rij meetbare functies f_n b.o. convergeert naar de functie f, dan is f meetbaar.*

Bewijs Zie Opgave 4.5.

Definitie 4.15. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. We noemen een maatruimte $(X, \mathcal{A}', \mu')$ een *uitbreiding* van $(X, \mathcal{A}, \mu)$ als $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ en $\mu'(A) = \mu(A)$ voor elke $A \in \mathcal{A}$.
De kleinste volledige uitbreiding $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ van $(X, \mathcal{A}, \mu)$ (die uniek bestaat, zie hieronder) noemen we de *completering* van $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Propositie 4.16. *Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Laat $\overline{\mathcal{A}}$ bestaan uit alle deelverzamelingen A van X zo dat $A_1 \subset A \subset A_2$ voor zekere $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ met $\mu(A_2 \backslash A_1) = 0$ en definieer voor zulke A dat $\overline{\mu}(A) := \mu(A_1)$. Dan is $\overline{\mu}(A)$ goed gedefinieerd, d.w.z. onafhankelijk van de keuze van A_1 en A_2, en is $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ een maatruimte en de kleinste volledige uitbreiding van $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dus $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ is de completering van $(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

Bewijs Als $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ inderdaad een goed gedefinieerde maatruimte is en $(X, \mathcal{A}', \mu')$ een volledige uitbreiding van $(X, \mathcal{A}, \mu)$, dan geldt voor elke A met $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $A_1 \subset A \subset A_2$ en $\mu(A_2 \backslash A_1) = 0$ dat $A \backslash A_1 \subset A_2 \backslash A_1$, dus $A \backslash A_1 \in \mathcal{A}'$ en $\mu'(A \backslash A_1) = 0$. Dus $A = A_1 \bigcup (A \backslash A_1) \in \mathcal{A}'$ en $\mu'(A) = \mu'(A_1) + \mu'(A \backslash A_1) = \mu(A_1) = \overline{\mu}(A)$. Dus elke volledige uitbreiding van $(X, \mathcal{A}, \mu)$ is een uitbreiding van $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$.

Nu moet nog bewezen worden dat $\overline{\mathcal{A}}$ een σ-algebra is, dat $\overline{\mu}(A)$ goed gedefinieerd is voor $A \in \overline{\mathcal{A}}$, dat $\overline{\mu}$ een maat is op $(X, \overline{\mathcal{A}})$, dat $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ een uitbreiding is van $(X, \mathcal{A}, \mu)$, en dat $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ een volledige maatruimte is. Dit wordt als opgave aan de lezer overgelaten; zie Opgave 4.8. □

Propositie 4.17. *Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte met completering $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ en f een $\overline{\mathcal{A}}$-meetbare functie op X. Dan bestaat er een $N \in \mathcal{A}$ met $\mu(N) = 0$ zo dat $f 1_{N^c}$ $\mathcal{A}$-meetbaar is.*

Bewijs We geven het bewijs voor de niet-negatieve functie $g := f^+$. Daaruit volgt het algemene geval eenvoudig. Schrijf $g = \sum_n c_n 1_{A_n}$ met $c_n > 0$ en $A_n \in \overline{\mathcal{A}}$ (zie Stelling 2.32). Kies nu voor iedere n een $\mathcal{A}$-meetbare verzameling $B_n \subset A_n$ zo dat $N_n := A_n \backslash B_n$ $\overline{\mu}$-maat 0 heeft. Dan is $g_0 := \sum_n c_n 1_{B_n}$ een $\mathcal{A}$-meetbare functie. Omdat $\overline{\mu}\big(\bigcup_n N_n\big) = 0$ is er een $N \in \mathcal{A}$ met $N \supset \bigcup_n N_n$ en $\mu(N) = 0$. Dan geldt $g = g_0$ buiten N. □

4.5 Lebesgue-meetbare functies

Definitie 4.18. Laat $(\mathbb{R}^d, \overline{\mathcal{B}}, \overline{\lambda})$ de completering zijn van $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}, \lambda)$ met $\mathcal{B}$ de Borel-σ-algebra op $\mathbb{R}^d$ en λ de Lebesgue-maat. Dan heet $\overline{\mathcal{B}}$ de *Lebesgue-σ-algebra* op $\mathbb{R}^d$ en $\overline{\lambda}$ wordt weer *Lebesgue-maat* genoemd, en doorgaans geschreven als λ i.p.v. $\overline{\lambda}$. Een functie f op $\mathbb{R}^d$ heet *Lebesgue-meetbaar* als hij meetbaar is t.o.v. deze completering, en *Lebesgue-integreerbaar* als hij integreerbaar is t.o.v. deze completering.

Omdat de Lebesgue-maat λ op $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$ translatie-invariant is (zie Opgave 3.2), zal ook de gecompleteerde maat $\overline{\lambda}$ translatie-invariant zijn (ga na).

Opmerking 4.19. Als N een nulverzameling is in de maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$, dan is elke deelverzameling van N $\overline{\mathcal{A}}$-meetbaar. Als $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een nulverzameling N heeft met dezelfde kardinaliteit als X, dan heeft $\overline{\mathcal{A}}$ dus dezelfde kardinaliteit als 2^X.

In het geval van $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ is de Cantor-verzameling een Borel-nulverzameling met dezelfde kardinaliteit $\mathfrak{c}$ als van $\mathbb{R}$ (zie Voorbeeld 3.26). Dus de Lebesgue-σ-algebra op $\mathbb{R}$ heeft kardinaliteit $2^{\mathfrak{c}}$. Dit is aanzienlijk groter dan de kardinaliteit van de Borel-σ-algebra op $\mathbb{R}$, want die is gelijk aan $\mathfrak{c}$ (zie Knapp [16, Ch. V, Problem 31]).

Ook al heeft de Lebesgue-σ-algebra op $\mathbb{R}$ dezelfde kardinaliteit als $2^{\mathbb{R}}$, toch zijn er deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ die niet Lebesgue-meetbaar zijn. Om dit in te zien hebben we echter het keuze-axioma nodig, zoals in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld 4.20. [Vitali, 1905] Definieer op $\mathbb{R}$ de equivalentierelatie $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Voor iedere equivalentieklasse kunnen we met behulp van het keuze-axioma een representant in $(0, 1)$ kiezen. Noem de verzameling van al deze representanten A. Merk op:

- Als $x \in (0, 1)$ dan $x \in A + q$ voor een rationale $q \in (-1, 1)$.
  Want $x = a + q$ voor een $a \in A$ en $q \in \mathbb{Q}$, dus $q = x - a$ met $x, a \in (0, 1)$.

- Als $q, r \in \mathbb{Q}$ met $q \neq r$ dan $(A + q) \bigcap (A + r) = \emptyset$.
  Want stel niet, dan $a + q = b + r$ voor zekere $a, b \in A$. Dus $b \in a + \mathbb{Q}$, dus $a \sim b$, dus $a = b$, dus $q = r$, een tegenspraak.

We zullen laten zien dat A niet Lebesgue-meetbaar is. Want neem aan dat A Lebesgue-meetbaar is. Dan is $S := \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} (A + q)$ een aftelbare disjuncte vereniging van Lebesgue-meetbare verzamelingen, en $(0, 1) \subset S \subset (-1, 2)$. Dus $\lambda((0, 1)) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap (-1,1)} \lambda(A + q) \leq \lambda((-1, 2))$. Omdat $\lambda(A + q) = \lambda(A)$, volgt er dat $1 \leq \infty \cdot \lambda(A) \leq 3$. Nu is $\infty \cdot \lambda(A) = 0$ als $\lambda(A) = 0$ en anders $\infty \cdot \lambda(A) = \infty$. In beide gevallen hebben we een tegenspraak.

In feite hebben we algemener laten zien dat er, onder aanname van het keuze-axioma, geen maatruimte $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}}, \mu)$ bestaat die een uitbreiding is van $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ en waarbij de maat μ translatie-invariant is.

Voorbeeld 4.21. [Banach-Tarski-paradox] Een constructie van Hausdorff [13] laat ook zien dat niet elke deelverzameling van $\mathbb{R}^3$ Lebesgue-meetbaar is. Daartoe schrijft hij de eenheidssfeer S^2 in $\mathbb{R}^3$ als een disjuncte vereniging $S^2 = A \cup B \cup C \cup D$ met D aftelbaar en A, B, C met elkaar congruent (onder rotaties en translaties), terwijl A ook congruent is met $B \cup C$. Dus afgezien van de aftelbare verzameling D bestaat S^2 uit drie kopieën van A en uit twee kopieën van A.

Hoewel bovenstaand resultaat meestal de *Banach-Tarski-paradox* genoemd wordt, hebben de eigenlijke resultaten van Banach en Tarski betrekking op de massieve eenheidsbal $B := \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$. In het sterkere resultaat van Robinson [24] luidt dit:

Er zijn disjuncte decomposities

$$B = \bigcup_{i=1}^{5} A_i, \quad B = R_1(A_1) \cup R_2(A_2), \quad B = R_3(A_3) \cup R_4(A_4) \cup R_5(A_5)$$

met A_5 uit 1 punt bestaande en met de R_i congruentie-transformaties zonder spiegelingen (dus opgebouwd uit rotaties en translaties).

Hier kunnen de A_i $(i = 1, \ldots, 4)$ niet Lebesgue-meetbaar zijn, omdat anders de Lebesgue-maat van B (duidelijk positief) gelijk aan zijn tweevoud zou zijn. Het niet-constructieve bewijs (gebruik makend van het keuze-axioma) van Robinson geeft eerst een soortgelijk resultaat voor S^2:

Er zijn disjuncte decomposities

$$S^2 = \bigcup_{i=1}^{4} A_i, \quad S^2 = R_1(A_1) \cup R_2(A_2), \quad S^2 = R_3(A_3) \cup R_4(A_4)$$

met de R_i rotaties.

Je kunt meer over allerlei zaken rond de Banach-Tarski-paradox lezen in een boek van Wagon [35].

De constructies in de vorige twee voorbeelden gebruiken naast het keuze-axioma ook de translatie-invariantie en (voor dimensie > 1) de rotatie-invariantie van de Lebesgue-maat of van een eventuele uitbreiding van de Lebesgue-maat. De volgende stelling van Ulam [34] (zie ook Oxtoby [21, Chapter 5]) maakt geen gebruik van deze invarianties.

Stelling 4.22 (Ulam)**.** *Een eindige maat gedefinieerd op alle deelverzamelingen van een verzameling X van kardinaliteit $\aleph_1$ die 0 is op eindige deelverzamelingen, is identiek 0.*

Onder aanname van de continuumhypothese ($\aleph_1 = \mathfrak{c}$) concluderen we dus bijvoorbeeld dat de Lebesgue-maat op $[0,1]$ geen uitbreiding kan hebben tot alle deelverzamelingen van $[0,1]$. Merk op dat $\aleph_1$ goed geordend is. Dus als $\aleph_1 = \mathfrak{c}$ dan is $\mathbb{R}$ goed geordend en zal het keuzeaxioma binnen $\mathbb{R}$ gelden in de zin dat we representanten kunnen kiezen voor een gegeven collectie niet-lege deelverzamelingen van $\mathbb{R}$.

Het blijkt essentieel te zijn dat de constructies van niet Lebesgue-meetbare verzamelingen in de twee voorbeelden hierboven, en ook Ulams resultaat, gebruik maakten van het keuze-axioma. Solovay [31] bewees nl. dat het zonder aanname van het keuze-axioma onmogelijk is om de existentie van een niet-Lebesgue meetbare verzameling te bewijzen. In feite bewees hij dat de Zermelo-Fraenkel-verzamelingstheorie even consistent is bij toevoeging van het keuze-axioma als bij toevoeging van de aanname dat elke deelverzameling van $\mathbb{R}$ Lebesgue-meetbaar is.

4.6 Riemann-integraal en Lebesgue-integraal

In deze paragraaf leggen we het verband tussen de Riemann-integraal en de Lebesgue-integraal. We zullen zien dat een begrensde Riemann-integreerbare functie op een begrensd interval $(a, b]$ bevat in $\mathbb{R}$ Lebesgue-meetbaar is en dat de Lebesgue-integraal gelijk is aan de Riemann-integraal. Voor oneigenlijk Riemann-integreerbare functies ligt de zaak anders. Dat wordt behandeld in de opgaven. We geven in deze paragraaf (Stelling 4.23) ook een mooie karakterisatie van de Riemann-integreerbare functies op $(a, b]$.

We beschouwen in deze paragraaf steeds begrensde reëelwaardige functies f op een vast interval $(a, b] \subset \mathbb{R}$, met $a < b$, en $a, b \in \mathbb{R}$. Zij $\mathcal{T}$ de verzameling van alle simpele functies (in feite trapfuncties) u op $(a, b]$ van de vorm

$$u = \textstyle\sum_{k=1}^{q} c_k 1_{(a_{k-1}, a_k]}, \tag{4.10}$$

waarbij

$$F = \{a = a_0 < a_1 < \ldots < a_q = b\} \tag{4.11}$$

een partitie is van het interval $(a, b]$. De q-dimensionale lineaire ruimte van alle trapfuncties u van de vorm (4.10) bij vaste partitie F als in (4.11) geven we aan met $\mathcal{T}(F)$.

Voor de trapfunctie u in (4.10) vallen de Riemann-integraal en de Lebesgue-integraal duidelijk samen:

$$\int_a^b u(t)\,dt = \sum_{k=1}^{q} c_k(a_k - a_{k-1}) = \int_{(a,b]} u\,d\lambda.$$

Zij $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ begrensd maar verder willekeurig. Definieer

$$A := \sup_{\substack{u \le f \\ u \in \mathcal{T}}} \int_a^b u(t)\,dt \qquad \text{en} \qquad B := \inf_{\substack{v \ge f \\ v \in \mathcal{T}}} \int_a^b v(t)\,dt.$$

Duidelijk is $A \le B$.

Kies nu rijen $u_n \le f$ en $v_n \ge f$ in $\mathcal{T}$ met $\int_a^b u_n(t)\,dt \to A$ en $\int_a^b v_n(t)\,dt \to B$. Er bestaan eindige verzamelingen $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$ zo dat u_n en v_n in $\mathcal{T}(F_n)$ liggen voor elke n, en zo dat $\bigcup F_n$ dicht ligt in $[a,b]$. In $\mathcal{T}(F_n)$ is er een maximaal element $\widetilde{u}_n \le f$ en een minimaal element $\widetilde{v}_n \ge f$. Er geldt

$$u_n \le \widetilde{u}_n \le f \le \widetilde{v}_n \le v_n$$

en de rij trapfuncties $(\widetilde{u}_n)$ is stijgend en de rij $(\widetilde{v}_n)$ dalend. Dus de rijen hebben limieten: $\widetilde{u}_n \uparrow \widetilde{u}$ en $\widetilde{v}_n \downarrow \widetilde{v}$. Dus

$$\widetilde{u}_n \le \widetilde{u} \le f \le \widetilde{v} \le \widetilde{v}_n$$

De functies $\widetilde{u}$ en $\widetilde{v}$ zijn dan begrensde Borel-meetbare functies, dus zeker ook Lebesgue-integreerbaar. Uit de Stelling van Lebesgue volgt dat

$$\int_{(a,b]} \widetilde{u}_n\,d\lambda \uparrow \int_{(a,b]} \widetilde{u}\,d\lambda = A \qquad \text{en} \qquad \int_{(a,b]} \widetilde{v}_n\,d\lambda \downarrow \int_{(a,b]} \widetilde{v}\,d\lambda = B.$$

Na deze voorbereidingen kunnen we de hoofdstelling van deze paragraaf formuleren.

Stelling 4.23. *Zij $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie. Dan is f Riemann-integreerbaar dan en slechts dan als f bijna overal op $(a,b]$ continu is. Als deze beide equivalente eigenschappen gelden dan is f Lebesgue-integreerbaar en is de Riemann-integraal van f gelijk aan de Lebesgue-integraal, d.w.z.*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_{(a,b]} f\,d\lambda.$$

Bewijs Neem eerst aan dat f Riemann-integreerbaar is. Dan geldt $A = B$, dus $\int_{(a,b]} \widetilde{u}\,d\lambda = \int_{(a,b]} \widetilde{v}\,d\lambda$, dus $\int_{(a,b]}(\widetilde{v} - \widetilde{u})\,d\lambda = 0$, dus $\widetilde{v} - \widetilde{u}$ is een nulfunctie wegens Propositie 3.28. Dus f verschilt van $\widetilde{u}$ op een verzameling die bevat is in een Borel-verzameling van maat 0. Dus f is Lebesgue-meetbaar, maar niet per se Borel-meetbaar. Nu is ook $\int_{(a,b]} f\,d\lambda$ gelijk aan A $(= B)$, dus gelijk aan $\int_a^b f(t)\,dt$.

Nu bewijzen we, onder de aanname dat f Riemann-integreerbaar is, dat f bijna overal continu is. We merkten al op dat dan $\widetilde{v} - \widetilde{u}$ een nulfunctie is, dus dan $\widetilde{u}(x) = f(x) = \widetilde{v}(x)$ voor x buiten een zekere verzameling N van maat 0. Neem nu x buiten de vereniging van N met de (aftelbare) verzameling $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, wat nog steeds een nulverzameling is. We laten nu zien dat f dan continu is in x. Inderdaad, laat $\varepsilon > 0$. Dan is er een n zo dat

$$f(x) - \varepsilon < \widetilde{u}_n(x) \le f(x) \le \widetilde{v}_n(x) < f(x) + \varepsilon.$$

Omdat $x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, zullen $\widetilde{u}_n$ en $\widetilde{v}_n$ constant zijn op zekere omgeving $(x-\delta, x+\delta)$ van x. Dus als $|y-x| < \delta$ dan zal

$$f(x) - \varepsilon < \widetilde{u}_n(y) \leq f(y) \leq \widetilde{v}_n(y) < f(x) + \varepsilon,$$

dus dan $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Dit bewijst de continuïteit van f in x.

Nu moeten we nog bewijzen: als f b.o. continu is dan is f Riemann-integreerbaar. Eerst bewijzen we: als f continu is in een punt x dan is $\widetilde{u}(x) = \widetilde{v}(x)$ in dat punt x. Neem dus aan dat f continu is in x. Laat $\varepsilon > 0$. Dan is er een $\delta > 0$ zo dat $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ als $|y - x| < \delta$. Voor elke n zal $x \in (a_{k-1}, a_k]$ met $a_{k-1}, a_k \in F_n$. Dan moet

$$x - \delta < a_{k-1} < x \leq a_k < x + \delta$$

voor n voldoende groot, want anders zou $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ niet dicht kunnen liggen in $[a, b]$. Neem dan zo'n voldoende grote n. Dan

$$\widetilde{u}_n(x) = \inf_{y \in (a_{k-1}, a_k]} f(y) \geq f(x) - \varepsilon \qquad \text{en} \qquad \widetilde{v}_n(x) = \sup_{y \in (a_{k-1}, a_k]} f(y) \leq f(x) + \varepsilon.$$

Dus

$$f(x) - \varepsilon \leq \widetilde{u}_n(x) \leq \widetilde{u}(x) \leq f(x) \leq \widetilde{v}(x) \leq \widetilde{v}_n(x) \leq f(x) + \varepsilon.$$

Omdat ε willekeurig was gekozen, concluderen we dat $\widetilde{u}(x) = \widetilde{v}(x)$.

Veronderstel nu dat f b.o. continu is. Dan is $\widetilde{u} = \widetilde{v}$ b.o., dus $A = \int_{(a,b]} \widetilde{u}\, d\lambda = \int_{(a,b]} \widetilde{v}\, d\lambda = B$. Omdat $A = B$, is f Riemann-integreerbaar. □

Voorbeeld 4.24. Zij $C \subset [0, 1]$ de Cantor-verzameling (zie Voorbeeld 3.26). Dan is de functie 1_C b.o. continu op $[0, 1]$, dus Riemann-integreerbaar op $[0, 1]$ (ga na). Voor elke deelverzameling $S \subset C$ is 1_S eveneens b.o. continu op $[0, 1]$ dus Riemann-integreerbaar (ga na). Dus de collectie van alle $S \subset [0, 1]$ waarvoor 1_S Riemann-integreerbaar is, heeft kardinaliteit $2^{\mathfrak{c}}$. Voor lang niet al zulke S kan 1_S Borel-meetbaar zijn, want de collectie van alle $S \subset [0, 1]$ waarvoor 1_S Borel-meeetbaar is, heeft kardinaliteit $\mathfrak{c}$ (zie Opmerking 4.19). Omgekeerd, als 1_S Borel-meetbaar is, dan hoeft 1_S niet Riemann-integreerbaar te zijn; neem bijvoorbeeld $S := Q \cap [0, 1]$.

Voorbeeld 4.25. Een generalisatie van de Cantor-verzameling (zie Voorbeeld 3.26) is de *vette Cantor-verzameling* C_c (Engels: Cantor set *of positive measure*). Deze hangt van een reële parameter c af, met $0 < c \leq \frac{1}{3}$, waarbij het geval $c = \frac{1}{3}$ de gewone Cantor-verzameling geeft. Net zo als bij de Cantor-verzameling verkrijgen we C_c als een doorsnede

$$C_c := \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{(n)}$$

van een dalende rij gesloten verzamelingen $F_{(n)}$, waarbij $F_{(n)}$ de vereniging is van 2^n disjuncte gesloten intervallen

$$F_{i_1,\ldots,i_n} = [a_{i_1,\ldots,i_n}, b_{i_1,\ldots,i_n}] \qquad (i_1, \ldots, i_n \in \{0, 2\}).$$

Hier verkrijgen we F_0 en F_2 door uit het midden van het interval $[0, 1]$ een open interval van lengte c weg te halen, dus

$$F_0 = [a_0, b_0] = [0, \tfrac{1}{2}(1 - c)], \quad F_2 = [a_2, b_2] = [\tfrac{1}{2}(1 + c), 1].$$

Recursief construeren we $F_{i_1,\ldots,i_{n-1},0}$ en $F_{i_1,\ldots,i_{n-1},2}$ door uit het midden van $F_{i_1,\ldots,i_{n-1}}$ een open interval van lengte c^n weg te halen. Dus

$$\begin{aligned}F_{i_1,\ldots,i_{n-1},0} &= [a_{i_1,\ldots,i_{n-1}}, \tfrac{1}{2}(a_{i_1,\ldots,i_{n-1}} + b_{i_1,\ldots,i_{n-1}} - c^n)],\\ F_{i_1,\ldots,i_{n-1},2} &= [\tfrac{1}{2}(a_{i_1,\ldots,i_{n-1}} + b_{i_1,\ldots,i_{n-1}} + c^n), b_{i_1,\ldots,i_{n-1}}].\end{aligned}$$

Dus

$$b_{i_1,\ldots,i_n} - a_{i_1,\ldots,i_n} = \tfrac{1}{2}(b_{i_1,\ldots,i_{n-1}} - a_{i_1,\ldots,i_{n-1}} - c^n).$$

Dus het interval $F_{i_1,\ldots,i_n}$ heeft lengte

$$2^{-n} - 2^{-n}c - 2^{-n+1}c^2 - \ldots - 2^{-1}c^n = 2^{-n}\left(1 - \frac{c(1-(2c)^n)}{1-2c}\right) = 2^{-n}\left(\frac{1-3c+c(2c)^n}{1-2c}\right).$$

Deze lengte is groter dan 0 omdat $c \le \frac{1}{3}$.

We kunnen nu het volgende nagaan (zie Opgave 4.9):

1. $\lambda(C_c) = \dfrac{1-3c}{1-2c}$, dus $\lambda(C_c) > 0$ als $0 < c < \frac{1}{3}$.

2. C_c heeft leeg inwendige, dus is nergens dicht in $[0,1]$.

3. C_c heeft de kardinaliteit c van het continuum.

4. Als $0 < c < \frac{1}{3}$ dan is 1_{C_c} in elk punt van C_c niet continu en 1_{C_c} is continu in elk punt van het complement van C_c. Dus wegens Stelling 4.23 is de functie 1_{C_c} op $[0,1]$ niet Riemann-integreerbaar, maar natuurlijk wel Lebesgue-integreerbaar.

Opmerking 4.26. Het grote voordeel van de Lebesgue-integraal is dat we deze over een onbegrensd interval niet anders te hoeven definiëren dan over een begrensd interval. Maar we hebben daarbij de toch wel zware eis dat de te integreren functie f integreerbaar is, dus dat de integraal van $|f|$ eindig is. Voor oscillerende continue functies f op, zeg, $[0,\infty)$ kan het voorkomen dat

$$\int_{[0,\infty)} |f|\,d\lambda = \infty, \text{ terwijl } \lim_{M\to\infty} \int_{[0,M]} f\,d\lambda \text{ bestaat en eindig is.}$$

In dat geval is die eindige limiet per definitie gelijk aan de oneigenlijke Riemann-integraal, dus f is oneigenlijk Riemann-integreerbaar:

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^M f(t)\,dt,$$

maar f is niet Lebesgue-integreerbaar. Ga dit bijvoorbeeld na voor de functie $f(t) := \sin(t^2)$ (zie Opgave 4.10).

Zie ook Opgave 4.11 en Opgave 4.12.

4.7 Opgaven

Opgave 4.1. Laat $A_1, A_2, \dots$ een rij meetbare verzamelingen zijn in de maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Beschouw de verzameling A van de punten $x \in X$ die in oneindig veel verzamelingen A_n uit deze rij liggen. Laat zien dat $1_A = \limsup_{n\to\infty} 1_{A_n}$. Laat ook zien dat A een nulverzameling is als $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Hoe heet het lemma waarvan de laatste zin de helft is?

Opgave 4.2. Stel $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn continu en $p \le q$. Laat $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn en definieer

$$H(x) = \int_{p(x)}^{q(x)} h(x,y)\,dy.$$

Bewijs dat H continu is op $\mathbb{R}$.

Opgave 4.3. Bewijs dat de Laplace-getransformeerde F van een eindige maat op $[0,\infty)$ (zie Voorbeeld 4.11) een C^{∞}-functie is en dat

$$F^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^{\infty} y^k e^{-xy}\,d\mu(y) \qquad (x > 0).$$

Opgave 4.4. Zij f een C^1-functie op $\mathbb{R}^d$ die identiek 0 is buiten een zekere begrensde verzameling. Zij μ een eindige maat op $\mathbb{R}^d$. Definieer $g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\,d\mu(y)$. Bewijs dat g een C^1-functie is met partiële afgeleiden

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^d} f_i(x-y)\,d\mu(y), \quad \text{waarbij } f_i(z) := \frac{\partial f(z)}{\partial z_i}.$$

De functie g wordt het *convolutieproduct* van de functie g en de maat μ genoemd.

Opgave 4.5. Bewijs Propositie 4.14.

Opgave 4.6. Zij $f\colon [a,b] \to ([c,d)$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ een Lebesgue-meetbare functie. Bewijs dat

$$\sup_{c=c_0<c_1<\ldots<c_n=d} \sum_{i=1}^{n} c_{i-1}\,\lambda\big(f^{-1}([c_{i-1},c_i))\big) = \int_{[a,b]} f\,d\lambda = \inf_{c=c_0<c_1<\ldots<c_n=d} \sum_{i=1}^{n} c_i\,\lambda\big(f^{-1}([c_{i-1},c_i))\big).$$

(Deze bewering werd al in de Inleiding, Hoofdstuk 1 gemaakt.)

Opgave 4.7. Zij $[a,b]$ een begrensd interval. Laat de uitwendige maat $\lambda_{\mathrm{e}}(E)$ van een deelverzameling $E \subset [a,b]$ gedefinieerd zijn als in Hoofdstuk 1. Bewijs dat E Lebesgue-meetbaar is als $\lambda_{\mathrm{e}}(E) + \lambda_{\mathrm{e}}([a,b]\backslash E) = b - a$, en dat dan $\lambda(E) = \lambda_{\mathrm{e}}(E)$.
(Omgekeerd geldt voor elke Lebesgue-meetbare deelverzameling E van $[a,b]$ dat $\lambda(E) = \lambda_{\mathrm{e}}(E)$ omdat de Lebesgue-maat op $[a,b]$ regulier is (zie §3.4).)

Opgave 4.8. Bewijs de onderdelen van Propositie 4.16 die nog niet daar in de syllabus bewezen zijn.

Opgave 4.9. Bewijs de beweringen aan het eind van Voorbeeld 4.25.

Opgave 4.10. Bewijs dat de functie f op $[0,\infty)$ gedefinieerd door $f(t) := \sin(t^2)$ niet Lebesgue-integreerbaar is maar wel oneigenlijk Riemann-integreerbaar.

Opgave 4.11. Laat het volgende zien.
Zij $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ continu. Dan is f oneigenlijk Riemann-integreerbaar dan en slechts dan als f Lebesgue-integreerbaar is. De twee integralen zijn dan gelijk.

Opgave 4.12. Laat het volgende zien.
Zij $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ continu, oneigenlijk Riemann-integreerbaar en Lebesgue-integreerbaar. Dan is $\int_0^1 f(t)\, dt = \int_{(0,1]} f \, d\lambda$.

5 Dichtheid en beeldmaat

In dit hoofdstuk laten we zien hoe men bij een gegeven maat nieuwe maten kan construeren.

5.1 Dichtheden

Bij een gegeven maat op een meetbare ruimte kan men met behulp van dichtheden een grote verscheidenheid aan verdere maten op deze zelfde ruimte definiëren. Dit is speciaal van belang als we met de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}^d$ beginnen.

Afspraak Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en f een functie op X die niet-negatief meetbaar of complexwaardig integreerbaar is. Dan gebruiken we de notatie

$$\int_A f\,d\mu := \int_X f\,1_A\,d\mu \qquad (A \in \mathcal{A}). \tag{5.1}$$

Propositie 5.1. *Zij h een niet-negatieve meetbare functie op de maatruimte $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Definieer $\rho\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ door*

$$\rho(A) := \int_A h\,d\mu \qquad (A \in \mathcal{A}). \tag{5.2}$$

Dan is ρ een maat op $(X, \mathcal{A})$.

Bewijs De σ-additiviteit van ρ volgt uit Propositie 4.1. $\square$

Als de maat ρ gedefinieerd is door (5.2) dan schrijven we

$$d\rho = h\,d\mu \tag{5.3}$$

en we noemen h de *dichtheid* van de maat ρ t.o.v. de maat μ. Zie bijvoorbeeld de maat $d\rho(x) := e^{-x^2}\,d\lambda(x)$ op $\mathbb{R}$.

Definitie 5.2. Laat μ en ρ twee maten zijn op de meetbare ruimte $(X, \mathcal{A})$ zo dat voor alle $A \in \mathcal{A}$ geldt:

$$\mu(A) = 0 \implies \rho(A) = 0.$$

Dan heet de maat ρ *absoluut continu* t.o.v. de maat μ, notatie

$$\rho \ll \mu.$$

Propositie 5.3. *Als $d\rho = h\,d\mu$ (dus ρ gedefinieerd in termen van μ door (5.2)), dan $\rho \ll \mu$.*

Bewijs Dit volgt uit Propositie 3.28. $\square$

Definitie 5.4. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. De maat μ heet *σ-eindig* als $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ met $A_n \in \mathcal{A}$ en $\mu(A_n) < \infty$.
(Ga na dat we de A_n in $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ desgewenst disjunct of stijgend kunnen nemen terwijl $\mu(A_n) < \infty$.)

Bijvoorbeeld de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}^d$ is σ-eindig, maar de telmaat op $\mathbb{R}^d$ is niet σ-eindig.

Later zal uit de Stelling van Radon-Nikodym volgen dat $\rho \ll \mu$ impliceert dat $d\rho = h\,d\mu$ voor zekere dichtheid h (het omgekeerde dus van de implicatie in Propositie 5.3) **mits** de maten μ en ρ σ-eindig zijn. Onder de voorwaarde dat μ σ-eindig is zal zo dadelijk al blijken dat de dichtheid h μ-b.o. uniek bepaald is door μ en ρ: Als $h_1\,d\mu = h_2\,d\mu$ dan $h_1 = h_2$ μ-b.o. .

Voorbeeld 5.5. Hier zijn tegenvoorbeelden als we geen σ-eindigheid hebben. Zij λ de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}$. Definieer $d\mu := \infty\, d\lambda$. Deze, wat eigenaardige maat op de Lebesgue-σ-algebra van $\mathbb{R}$ geeft dus $\mu(A) = 0$ als $\lambda(A) = 0$ en $\mu(A) = \infty$ als $\lambda(A) > 0$. De maat μ is niet σ-eindig (ga na). Verder geldt niet alleen $\mu \ll \lambda$ maar ook $\lambda \ll \mu$. Niettemin bestaat er geen dichtheid h zo dat $d\lambda = h\, d\mu$ (ga na). Tenslotte geldt natuurlijk $\mu \ll \mu$, maar ook $\mu = c\, \mu$ voor elke $c > 0$, dus elke constante functie $c > 0$ is een dichtheid van μ t.o.v. μ.

Stelling 5.6. *Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een σ-eindige maatruimte en laat h_1 en h_2 niet-negatieve meetbare functies zijn op X. Definieer $d\rho_1 := h_1\, d\mu$ en $d\rho_2 := h_2\, d\mu$. Dan geldt:*

$$\rho_1 \le \rho_2 \implies h_1 \le h_2 \ \ \mu\text{-b.o.}\,. \tag{5.4}$$

Dus er geldt ook:

$$\rho_1 = \rho_2 \implies h_1 = h_2 \ \ \mu\text{-b.o.}\,. \tag{5.5}$$

Bewijs Equivalent aan (5.4) zullen we bewijzen:

$$\mu(\{h_1 > h_2\}) > 0 \implies \exists B \in \mathcal{A} \ \Big(\rho_1(B) > \rho_2(B)\Big).$$

Laat $A := \{h_1 > h_2\}$ en veronderstel dat $\mu(A) > 0$. We zoeken een geschikte B binnen A om daarvoor te bewijzen dat $\rho_1(B) > \rho_2(B)$. Om dat makkelijker te maken, laten we eerst zien dat we B binnen A kunnen kiezen zo dat $0 < \mu(B) < \infty$ en h_2 begrensd is op B.

We tonen eerst aan dat we een A_0 binnen A kunnen kiezen zo dat $0 < \mu(A_0) < \infty$. Omdat μ σ-eindig is, hebben we een stijgende rij van meetbare verzamelingen X_n zo dat $\mu(X_n) < \infty$ en $X_n \uparrow X$. Dus $(A \cap X_n) \uparrow A$. Dus $\mu(A \cap X_n) \uparrow \mu(A)$. Dus voor zekere n hebben we $0 < \mu(A \cap X_n) < \infty$. Schrijf voor die n dat $A_0 := A \cap X_n$. Dus $A_0 \subset A$ en $0 < \mu(A_0) < \infty$.

Nu tonen we aan dat we een B binnen A_0 kunnen kiezen zo dat $0 < \mu(B) < \infty$ en h_2 is begrensd op B. Op A_0 is $h_1 > h_2$, dus $h_2 < \infty$ op A_0. Dus $(A_0 \cap \{h_2 \le m\}) \uparrow A_0$. Dus $\mu(A_0 \cap \{h_2 \le m\}) \uparrow \mu(A_0)$. Dus, omdat $0 < \mu(A_0) < \infty$, hebben we voor zekere m dat $0 < \mu(A_0 \cap \{h_2 \le m\}) < \infty$. Schrijf voor die m dat $B := A_0 \cap \{h_2 \le m\}$. Dus $B \subset A$, $0 < \mu(B) < \infty$ en h_2 is begrensd op B.

Nu laten we zien dat $\rho_1(B) > \rho_2(B)$. We kunnen schrijven:

$$\rho_1(B) = \int_B h_1\, d\mu = \int_B (h_1 - h_2)\, d\mu + \int_B h_2\, d\mu = \int_B (h_1 - h_2)\, d\mu + \rho_2(B). \tag{5.6}$$

Omdat h_2 door m begrensd is op B, geldt $h_1 = (h_1 - h_2) + h_2$ op B met $0 \le h_2 \le m$ en $0 < h_1 - h_2 \le \infty$, en daardoor volgt de tweede gelijkheid in (5.6) uit de additiviteit van de integraal van een niet-negatieve functie. Nu geldt dat $0 < \int_B (h_1 - h_2)\, d\mu \le \infty$, want als $\int_B (h_1 - h_2)\, d\mu = 0$ dan kan $h_1 - h_2$ slechts > 0 zijn op B op een μ-nulverzameling. Maar $h_1 - h_2 > 0$ overal op B, dus dan $\mu(B) = 0$, een tegenspraak. Verder zal $\rho_2(B) = \int_B h_2\, d\mu \le m\, \mu(B) < \infty$ want $h_2 \le m$ op B en $\mu(B) < \infty$. Omdat $0 \le \rho_2(B) < \infty$ en $0 < \int_B (h_1 - h_2)\, d\mu \le \infty$ mogen we uit (5.6) concluderen dat $\rho_1(B) > \rho_2(B)$. □

Propositie 5.7. *Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een σ-eindige maatruimte en laat h een niet-negatieve meetbare functie zijn op X. Definieer $d\rho := h\, d\mu$. Als $h < \infty$ μ-b.o., dan is ρ een σ-eindige maat.*

Bewijs De maat μ is σ-eindig, dus er bestaat een rij meetbare verzamelingen A_n die X overdekt met $\mu(A_n) < \infty$. Laat $N := \{h = \infty\}$, dan $\mu(N) = 0$, dus $\rho(N) = 0$ (zie Propositie 5.3). Laat $A_{n,k} := A_n \bigcap \{h < k\}$, dan $\rho(A_{n,k}) = \int_{A_n} h\, 1_{\{h<k\}}\, d\mu \le k\, \mu(A_n) < \infty$. De verzamelingen N en $A_{n,k}$ overdekken X en hebben eindige maat. □

Propositie 5.8. *Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en laat h een niet-negatieve meetbare functie zijn op X. Definieer $d\rho := h\, d\mu$. Dan geldt voor elke niet-negatieve meetbare functie ϕ op X dat*

$$\int_X \phi\, d\rho = \int_X \phi h\, d\mu. \tag{5.7}$$

Verder is $\phi\colon X \to [-\infty, \infty]$ ρ-integreerbaar dan en slechts dan als ϕh μ-integreerbaar is, en de identiteit (5.7) blijft dan geldig. Tenslotte, als h geen waarde ∞ aanneemt, dan is $\phi\colon X \to \mathbb{C}$ ρ-integreerbaar dan en slechts dan als ϕh μ-integreerbaar is en blijft de identiteit (5.7) geldig.

Bewijs Neem eerst $\phi := 1_A$ met $A \in \mathcal{A}$. Dan

$$\int_X 1_A\, d\rho = \rho(A) = \int_X 1_A h\, d\mu,$$

dus (5.7) geldt.

Neem nu ϕ niet-negatief en meetbaar, en gebruik Stelling 2.32. Dus $\phi = \sum_n c_n 1_{A_n}$ met $0 < c_n < \infty$ en A_n meetbaar. Dan

$$\begin{aligned}\int_X \phi\, d\rho = \sum_n c_n \int_X 1_{A_n}\, d\rho = \sum_n c_n \int_X 1_{A_n} h\, d\mu \\ = \int_X \textstyle\sum_n c_n (1_{A_n} h)\, d\mu = \int_X \Big(\textstyle\sum_n c_n 1_{A_n}\Big) h\, d\mu = \int_X \phi h\, d\mu.\end{aligned}$$

Hier hebben we in de eerste en derde identiteit Propositie 4.1 gebruikt en in de vierde identiteit de conventie uit §2.7 dat $0 \cdot \infty = 0 = \infty \cdot 0$ samen met de opmerking daar dat de distributiviteit dan geldig blijft (hier met een mogelijk oneindige som; ook dan blijft de distributiviteit geldig, ga na).

De verdere beweringen uit de propositie volgen nu onmiddellijk (ga na). □

Stelling 5.9 (Kettingregel). *Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en laat f en g niet-negatieve meetbare functies zijn op X. Definieer $d\rho := f\, d\mu$ en $d\tau := g\, d\rho$. Dan $d\tau = (gf)\, d\mu$.*

Bewijs Zij $A \in \mathcal{A}$. Er geldt met behulp van (5.7):

$$\tau(A) = \int_X 1_A g\, d\rho = \int_X 1_A g f\, d\mu = \int_A g f\, d\mu. \qquad \square$$

Gevolg 5.10. *Laat $d\rho = f\, d\mu$. Dan:*

a) Als $0 < f < \infty$ μ-b.o. dan is er een niet-negatieve meetbare functie g zo dat $fg = 1$ μ-b.o. .

b) Als $fg = 1$ μ-b.o. dan $d\mu = g\, d\rho$.

c) Laat μ of ρ σ-eindig zijn. Als $d\mu = g\, d\rho$ dan $fg = 1$ μ-b.o. .

5.2 Beeldmaten

Stel we hebben twee meetbare ruimten $(X, \mathcal{A})$ en $(Y, \mathcal{B})$ (hier is $\mathcal{B}$ een willekeurige σ-algebra, niet noodzakelijk Borel). Laat $F\colon X \to Y$ een meetbare afbeelding zijn. Dan induceert F een afbeelding F_* van maten op $(X, \mathcal{A})$ naar maten op $(Y, \mathcal{B})$ als volgt.

Definitie 5.11. Zij F een meetbare afbeelding van $(X, \mathcal{A})$ naar $(Y, \mathcal{B})$ en zij μ een maat op $(X, \mathcal{A})$. De *beeldmaat (van μ onder F)* is een maat ν op $(Y, \mathcal{B})$, genoteerd als $F_*\mu$, zo dat

$$\nu(B) := \mu(F^{-1}(B)) \quad (B \in \mathcal{B}), \quad \text{dus} \qquad F_*\mu(B) = \mu(F^{-1}(B)). \tag{5.8}$$

Als $B \in \mathcal{B}$ dan is $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ omdat F meetbaar is. Dus (5.8) definieert inderdaad een afbeelding $\nu\colon \mathcal{B} \to [0, \infty]$. Ga na dat deze afbeelding de eigenschappen van een maat op $(Y, \mathcal{B})$ heeft.

Als F een meetbare afbeelding is van $(X, \mathcal{A})$ naar $(Y, \mathcal{B})$ en G een meetbare afbeelding van $(Y, \mathcal{B})$ naar $(Z, \mathcal{C})$ dan volgt er onmiddellijk (ga na) dat, voor μ een maat op X,

$$(G \circ F)_*\mu = G_*(F_*\mu). \tag{5.9}$$

In het bijzonder, als $(X, \mathcal{A}, \mu)$ en $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ maatruimten zijn en $F\colon X \to Y$ een meetbare bijectieve afbeelding is met F^{-1} ook meetbaar, dan (ga na):

$$\nu = F_*\mu \iff \mu = (F^{-1})_*\nu. \tag{5.10}$$

Voorbeeld 5.12. Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte. Laat $x_0 \in X$ en definieer de *puntmaat* (*Dirac-maat*) voor x_0, genoteerd δ_{x_0}, door

$$\delta_{x_0}(A) := \begin{cases} 1, & x_0 \in A, \\ 0, & x_0 \notin A, \end{cases}$$

waarbij $A \in \mathcal{A}$. Dan

$$F_*\delta_{x_0} = \delta_{F(x_0)} \qquad \text{(ga na)}.$$

Laat $M(X)$ de verzameling van maten op $(X, \mathcal{A})$ aanduiden. Dan is de afbeelding $x \mapsto \delta_x\colon X \to M(X)$ injectief. Met behulp van deze afbeelding maken we als het ware een kopie van X binnen $M(X)$, en evenzo een kopie van Y binnen $M(Y)$. Op deze manier kunnen we $F_*\colon M(X) \to M(Y)$ zien als een uitbreiding van de afbeelding $F\colon X \to Y$. We hebben een commutatief diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & M(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle F} & & \Big\downarrow{\scriptstyle F_*} \\ Y & \longrightarrow & M(Y) \end{array} \qquad : \qquad \begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & \delta_x \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ F(x) & \longrightarrow & F_*\delta_x \end{array}$$

De afbeelding $F\colon X \to Y$ induceert ook een afbeelding F^* van functies op Y naar functies op X:

$$F^*g := g \circ F, \qquad \text{dus} \qquad F^*g(x) = g(F(x)) \quad (x \in X)$$

als g een functie is op Y. We veronderstelden dat $F\colon X \to Y$ meetbaar is. Er volgt dat F^*g een meetbare functie is op $(X, \mathcal{A})$ als g een meetbare functie is op $(Y, \mathcal{B})$.

Propositie 5.13 (Verandering van variabele)**.** *Zij F een meetbare afbeelding van $(X, \mathcal{A})$ naar $(Y, \mathcal{B})$. Zij μ een maat op $(X, \mathcal{A})$. Zij g een niet-negatieve meetbare functie op Y. Dan is F^*g meetbaar en*

$$\int_X F^*g \, d\mu = \int_Y g \, dF_*\mu. \tag{5.11}$$

Verder is F^*g μ-integreerbaar als g (met waarden in $[-\infty, \infty]$ of in $\mathbb{C}$) $F_*\mu$-integreerbaar is, en de identiteit (5.11) *blijft dan geldig.*

Bewijs Neem $B \in \mathcal{B}$. Dan $F^*1_B = 1_B \circ F = 1_{F^{-1}(B)}$, dus

$$\int_X F^*1_B \, d\mu = \int_X 1_{F^{-1}(B)} \, d\mu = \mu(F^{-1}(B)) = F_*\mu(B) = \int_Y 1_B \, dF_*\mu.$$

Dus (5.11) geldt als $g = 1_B$. Volgens Stelling 2.32 mogen we een algemene niet-negatieve meetbare functie g op Y schrijven als $g = \sum_n c_n 1_{B_n}$ met $0 < c_n < \infty$ en $B_n \in \mathcal{B}$. Nu volgt (5.11) voor zulke algemene g uit de geldigheid van de formule voor 1_{B_n} en door twee keer Propositie 4.1 toe te passen. De verdere beweringen in de propositie volgen nu bijna onmiddellijk (ga na). $\square$

Voorbeeld 5.14. (Integraal van een radiële functie op $\mathbb{R}^2$)
Duid de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}^2$ aan met λ_2 (op $\mathbb{R}^d$ met λ_d) en de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}$ met λ. De afbeelding $\Phi\colon (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}\colon \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ is continu, dus meetbaar. Er kan worden bewezen dat

$$d\Phi_*\lambda_2(r) = 2\pi r \, d\lambda(r). \tag{5.12}$$

Dus er volgt dan uit Propositie 5.13 dat

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\sqrt{x^2+y^2}) \, d\lambda_2(x,y) = 2\pi \int_{[0,\infty)} f(r) \, r \, d\lambda(r) \tag{5.13}$$

als f een meetbare functie is op $[0,\infty)$ zo dat $\int_{[0,\infty)} |f(r)| \, r \, d\lambda(r) < \infty$. Dit is, in iets andere notatie, de welbekende formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y) \, dx \, dy = 2\pi \int_0^{\infty} f(r) \, r \, dr \quad \text{als } F(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2}).$$

We kunnen hier formule (5.12) nog niet volledig bewijzen. Schrijf $d\mu(r) := 2\pi r \, d\lambda(r)$, een maat op $[0,\infty)$. Er moet voor elke meetbare $E \subset [0,\infty)$ bewezen worden dat

$$\lambda_2\Big(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \in E\}\Big) = \mu(E).$$

Voor $E := [0,R]$ zegt dit dat

$$\lambda_2\Big(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \le R\}\Big) = 2\pi \int_0^R r \, dr.$$

Het rechterlid is gelijk aan πR^2. Dit is ook de oppervlakte van een cirkelschijf van straal R, dus gelijk aan het linkerlid (dit laatste zullen we in een volgend hoofdstuk rigoureus kunnen doen; zie Opgave 6.3). Het bewijs kan nu voltooid worden met behulp van de later te behandelen Eenduidigheidsstelling (Stelling 6.18). In vage bewoordingen zegt deze stelling dat, als twee maten aan elkaar gelijk zijn op een geschikte deelcollectie van een σ-algebra, die maten op de hele σ-algebra aan elkaar gelijk zullen zijn.

Analoga van (5.12) en (5.13) kunnen ook op $\mathbb{R}^d$ worden gegeven. Bijvoorbeeld voor $d = 3$ nemen we $\Phi\colon (x,y,z) \mapsto \sqrt{x^2+y^2+z^2}\colon \mathbb{R}^3 \to [0,\infty)$. Dan

$$d\Phi_*\lambda_3(r) = 4\pi r^2 \, d\lambda(r)$$

en

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \, d\lambda_3(x,y,z) = 4\pi \int_{[0,\infty)} f(r) \, r^2 \, d\lambda(r).$$

Voorbeeld 5.15. (Transformatiestelling)
Laat U en V open deelverzamelingen zijn van $\mathbb{R}^d$ en $F\colon U \to V$ een bijectieve C^1-afbeelding waarvan de puntsgewijze inverse F^{-1} ook C^1 is. De welbekende *transformatiestelling* zegt dan dat voor een continue integreerbare functie g op V geldt:

$$\int_V g(y)\, d\lambda(y) = \int_U g(F(x))\, |\det F'(x)|\, d\lambda(x). \tag{5.14}$$

Schrijf

$$d\mu(x) := |\det F'(x)|\, d\lambda(x).$$

Vergelijk (5.14) met (5.11). Dan zien we dat het linkerlid van (5.14) ook gelijk moet zijn aan

$$\int_V g(y)\, dF_*\mu(y),$$

wat suggereert (maar nog niet rigoureus bewijst) dat

$$F_*\mu = \lambda, \qquad \text{dus} \qquad \mu = (F^{-1})_*\lambda,$$

(waarbij we (5.10) gebruikten). Dus

$$d(F^{-1})_*\lambda = |\det F'(x)|\, d\lambda. \tag{5.15}$$

Zie voor een volledig bewijs van deze stelling Rudin [28, Theorems 8.26, 8.28].

Een speciaal (en makkelijker te bewijzen) geval van (5.14) hebben we voor $F(x) := Ax + b$ met A een inverteerbare lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^d$ en $b \in \mathbb{R}^d$. Dan

$$\int_V g(y)\, d\lambda(y) = \int_U g(Ax+b)\, |\det A|\, d\lambda(x) \qquad (V = \{Ax + b \mid x \in U\})$$

en

$$d(F^{-1})_*\lambda = |\det A|\, d\lambda \qquad (F(x) = Ax + b).$$

5.3 De isomorfiestelling

Definitie 5.16. Een afbeelding f van een meetbare ruimte $(X_1, \mathcal{A}_1)$ naar een meetbare ruimte $(X_2, \mathcal{A}_2)$ heet een *isomorfisme (van meetbare ruimten)* als $f\colon X_1 \to X_2$ bijectief is en f en f^{-1} meetbare afbeeldingen zijn.
Als X_1 en X_2 bovendien topologische ruimten zijn dan heet $f\colon X_1 \to X_2$ een *Borel-isomorfisme* als f bijectief is en f en f^{-1} Borel-meetbare afbeeldingen zijn, d.w.z. meetbaar t.o.v. de bijbehorende Borel-σ-algebra's.
Een *Poolse ruimte* was al gedefinieerd aan het eind van §2.8: het is een topologische ruimte die homeomorf is met een separabele volledige metrische ruimte.
Een *standaard-Borelruimte* is een meetbare ruimte die isomorf is met een Borel-deelverzameling van een Poolse ruimte.

Merk n.a.v. de definitie van standaard-Borelruimte op dat wegens Opgave 2.18 een Borel-deelverzameling Y van een topologische ruimte X (dus zeker van een Poolse ruimte) met de geïnduceerde topologie weer een topologische ruimte is waarvan de Borel-σ-algebra bestaat uit alle Borel-deelverzamelingen van X die bevat zijn in Y.

De volgende stelling staat op naam van Kuratowski [18]:

Stelling 5.17 (Isomorfiestelling). *Twee standaard Borel-ruimten zijn isomorf dan en slechts dan als ze dezelfde kardinaliteit hebben.*

Zie Srivastava [33, §3.3] of Parthasarathy [22, Chapter I, §2] voor een bewijs.

In feite is er in Stelling 5.17 óf sprake van een aftelbare kardinaliteit (en dan is is de stelling triviaal; ga na) óf van een overaftelbare kardinaliteit die gelijk is aan $\mathfrak{c}$. Dat is het interessante geval van de stelling, wat we equivalent kunnen formuleren als:

Stelling 5.18 (Isomorfiestelling, andere formulering).
Zij Y een overaftelbare Borel-deelverzameling van een separabele volledige metrische ruimte X. Dan bestaat er een isomorfisme $f\colon Y \to [0,1]$ van meetbare ruimten.

Het isomorfisme f in Stelling 5.18 kan zelfs gekozen worden als een isomorfisme van maatruimten. Neem daartoe aan dat op de meetbare ruimte Y in Stelling 5.18 een maat μ gegeven is die *niet-atomair* is, d.w.z. waarvoor $\mu(\{y\}) = 0$ voor elke $y \in Y$. Dan wordt in Srivastava, Theorem 3.4.23 bewezen:

Stelling 5.19 (Isomorfiestelling voor maatruimten). *Zij Y een overaftelbare Borel-deelverzameling van een separabele volledige metrische ruimte X en laat een niet-atomaire kansmaat μ op Y gegeven zijn. Dan bestaat er een isomorfisme $f\colon Y \to [0,1]$ van meetbare ruimten zo dat $f_*\mu = \lambda$ (λ de Lebesgue-maat op $[0,1]$).*

Voor $Y := [0,1)$ met maat $\mu := \lambda$ (Lebesgue-maat) kan een expliciete afbeelding f gegeven worden die voldoet aan de eisen in Stelling 5.19; zie Opgave 5.5.

In de topologie bestaan veel verschillende ruimten. De reële rechte is homeomorf met het open interval $(0,1)$, maar $\mathbb{R}$, $(0,1]$, $[0,1]$, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, de Cantor-verzameling, $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ zijn allemaal topologisch verschillend. Maar als Borel-meetbare ruimten zijn ze allemaal isomorf. Bovendien, als we te maken hebben met een eindige of σ-eindige niet-atomaire maat μ op een *nette* topologische ruimte (d.w.z. een Borel-deelverzameling van een volledige separabele metrische ruimte) dan is de maatruimte isomorf met de maatruimte $([0,t), \mathcal{B}, \lambda)$, waarbij $0 < t = \mu(X) \le \infty$ en λ de Lebesgue-maat is op de Borel-σ-algebra op $[0,t)$.

5.4 Opgaven

Opgave 5.1. Laat zien dat er een kansmaat π op $\mathbb{R}$ en een meetbare functie $f\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ bestaan zo dat $d\lambda = f\,d\pi$.

Opgave 5.2. Geef minstens twee redenen waarom het volgende geen goede definitie is.
Laat F een meetbare afbeelding zijn van $(X,\mathcal{A})$ naar $(Y,\mathcal{B})$. Zij ν een maat op $(Y,\mathcal{B})$. Definieer een maat μ op $(X,\mathcal{A})$ door:

$$\mu(A) := \nu(F(A)) \qquad (A \in \mathcal{A}).$$

Opgave 5.3. Definieer $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door $f(x) = [x]$, de entier van x, dat wil zeggen, $[x]$ is het grootste gehele getal kleiner of gelijk aan x. Zij nu λ Lebesgue-maat op $\mathbb{R}$. Bepaal de beeldmaat $f_*\lambda$.

Opgave 5.4. Zij $V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le x\}$. Bereken de integraal

$$\int_V \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\, d\lambda_2(x,y)$$

door over te gaan op poolcoördinaten, dat wil zeggen door (5.14) toe te passen met $F(r,\phi) := (r\cos\phi, r\sin\phi)$ voor een geschikte keuze van U.

Opgave* 5.5. Geef voor $Y := [0,1)$ met maat $\mu := \lambda$ (Lebesgue-maat) een expliciete afbeelding f die voldoet aan de eisen in Stelling 5.19.

6 De Stelling van Fubini

De belangrijkste resultaten van dit hoofdstuk betreffen de Stelling van Fubini over het verwisselen van de integratievolgorde in een dubbele integraal, mits aan zekere voorwaarden voldaan is. Er zijn twee versies van deze stelling: Fubini 1 in §6.7 en Fubini 2 in §6.9. Fubini 1 gaat over dubbelintegralen van niet-negatieve meetbare functies, Fubini 2 over dubbelintegralen van complexwaardige integreerbare functies. De paragrafen 6.6 over productruimten en 6.8 over productmaten zijn nauw verweven met Fubini 1 en 2.

De Stelling van Fubini 2 kan betrekkelijk snel uit Fubini 1 worden bewezen, maar bij het gebruik van Fubini 2 moet je goed opletten; er worden veel fouten mee gemaakt. Fubini 1 is makkelijker in het gebruik, maar het bewijs is dieper. Het blijkt te berusten op de Stelling van de Monotone Klasse, zie §6.2, die op zijn beurt weer volgt uit een verzamelingstheoretische versie van die stelling, zie §6.1. Een ander belangrijk gevolg van de Stelling van de Monotone Klasse is de Eenduidigheidsstelling, behandeld in §6.4.

Je kunt in dit hoofdstuk het beste beginnen in §6.5 en terugbladeren wanneer dit nodig is.

6.1 De Stelling van de Monotone Klasse voor verzamelingen

Definitie 6.1. Een collectie $\mathcal{M}$ van deelverzamelingen van een verzameling X is een *monotone klasse* als voor iedere dalende rij (M_n) in $\mathcal{M}$ ook de doorsnede en voor iedere stijgende rij (M_n) in $\mathcal{M}$ ook de vereniging in $\mathcal{M}$ ligt.

Voorbeeld 6.2. Een σ-algebra is een monotone klasse.

Opmerking 6.3. De doorsnede van een collectie monotone klassen $\mathcal{M}_t$ $(t \in T)$, is een monotone klasse. Bij iedere collectie $\mathcal{C}$ van deelverzamelingen van X is er dus een kleinste monotone klasse die deze collectie omvat. Die noemen we de monotone klasse *voortgebracht door* $\mathcal{C}$.

Lemma 6.4. *Zij $\mathcal{M}$ de monotone klasse voortgebracht door de collectie $\mathcal{C}$. Als $\mathcal{C}$ gesloten is onder eindige doorsneden, dan ook $\mathcal{M}$.*

Bewijs We willen bewijzen: Als E en F in $\mathcal{M}$ liggen, dan ook $E \cap F$.
Zij $E \in \mathcal{M}$ en zij $\mathcal{M}_E$ de collectie van alle $F \in \mathcal{M}$ waarvoor ook $E \cap F \in \mathcal{M}$, dus

$$\mathcal{M}_E = \{F \in \mathcal{M} \mid E \cap F \in \mathcal{M}\}.$$

Merk op dat $\mathcal{M}_E$ een monotone klasse is (ga na). We moeten bewijzen dat $\mathcal{M}_E = \mathcal{M}$ voor iedere $E \in \mathcal{M}$. Daarvoor is het voldoende te bewijzen dat de monotone klasse $\mathcal{M}_E$ de collectie $\mathcal{C}$ omvat. (Immers, $\mathcal{M}$ is de kleinste monotone klasse met deze eigenschap.) Het bewijs verloopt in twee stappen.
Stap 1 Als $C \in \mathcal{C}$ dan geldt $\mathcal{M}_C = \mathcal{M}$ omdat $\mathcal{M}_C \supset \mathcal{C}$. Dus als $E \in \mathcal{M}$ en $C \in \mathcal{C}$ dan $E \cap C \in \mathcal{M}$, dus $C \in \mathcal{M}_E$.
Stap 2 Als $E \in \mathcal{M}$ dan geldt $\mathcal{M}_E = \mathcal{M}$ omdat $\mathcal{M}_E \supset \mathcal{C}$ wegens Stap 1. □

Definitie 6.5. Een *algebra* op een verzameling X is een collectie $\mathcal{A}$ van deelverzamelingen van X met de eigenschappen

a) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

b) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$,

c) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$.

Ga nu zelf het bewijs van de volgende propositie na.

Propositie 6.6. *Een monotone klasse die een algebra is, is een σ-algebra.*

Stelling 6.7 (Stelling van de Monotone Klasse voor verzamelingen)**.** *Zij $\mathcal{A}$ een algebra en zij $\mathcal{M}$ de kleinste monotone klasse die $\mathcal{A}$ omvat. Dan is $\mathcal{M}$ een σ-algebra.*

Bewijs Wegens Propositie 6.6 is het voldoende te bewijzen dat $\mathcal{M}$ een algebra is. Uit Lemma 6.4 volgt dat $\mathcal{M}$ gesloten is onder eindige doorsneden. Het is dus voldoende te bewijzen dat er geldt: $M \in \mathcal{M} \implies M^c \in \mathcal{M}$. Zij nu $\mathcal{M}_0$ de collectie van alle $M \in \mathcal{M}$ waarvoor M^c ook in $\mathcal{M}$ ligt. Dit is een monotone klasse die $\mathcal{A}$ omvat, dus die ook de monotone klasse $\mathcal{M}$ voortgebracht door $\mathcal{A}$ omvat. We concluderen dat $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$. Hiermee is aangetoond dat $\mathcal{M}$ gesloten is onder het nemen van het complement. $\square$

6.2 De Stelling van de Monotone Klasse

Stelling 6.8 (Stelling van de Monotone Klasse)**.** *Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte met $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, waarbij $\mathcal{C}$ een collectie deelverzamelingen van X is die gesloten is onder eindige doorsneden:*

$$C_1, C_2 \in \mathcal{C} \implies C_1 \cap C_2 \in \mathcal{C}.$$

Zij L een collectie van begrensde meetbare functies $f\colon X \to \mathbb{R}$ die voldoet aan:

1. *$1 \in L$;*
2. *$1_C \in L$ voor iedere $C \in \mathcal{C}$;*
3. *L is een reële lineaire ruimte;*
4. *L is* **monotoon gesloten***: Als (f_n) een rij is in L en $0 \le f_1 \le f_2 \le \ldots \le 1$ en $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ dan $f \in L$.*

Dan bevat L alle begrensde meetbare functies $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Bewijs Zij T de verzameling van alle simpele functies van de vorm

$$a_0 + a_1 1_{C_1} + \cdots + a_q 1_{C_q} \qquad (a_i \in \mathbb{R},\ C_i \in \mathcal{C},\ q \ge 0).$$

Dit is een lineaire ruimte maar ook een algebra: $f, g \in T \implies fg \in T$ omdat $\mathcal{C}$ gesloten is onder eindige doorsneden. Verder bevat T de constante functies. Hieruit volgt dat de collectie $\mathcal{E}$ van alle verzamelingen $E \subset X$ met $1_E \in T$ een algebra is. (Als 1_E en 1_F in T liggen, dan ook $1_{F\cap E} = 1_E 1_F$ en $1_{E^c} = 1 - 1_E$.)

Zij nu $\mathcal{M}$ de collectie van alle verzamelingen $A \subset X$ met $1_A \in L$. Dan is $\mathcal{M}$ een monotone klasse (ga na; hier gebruiken we onder meer dat L monotoon gesloten is) die de algebra $\mathcal{E}$ omvat. Dus $\mathcal{M}$ omvat de σ-algebra $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$. Uit de meetbaarheid van de functies $\phi \in L$ volgt $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$. Dus $\mathcal{M} = \mathcal{A}$.

De verzameling L bevat dus de indicatorfuncties van alle meetbare verzamelingen. Met Propositie 2.30 volgt er dat L alle begrensde meetbare functies bevat (hier gebruiken we nogmaals dat L monotoon gesloten is). $\square$

Gevolg 6.9. *Zij L een monotoon gesloten lineaire ruimte van begrensde reëelwaardige Borel-functies op $\mathbb{R}^d$. Als L de indicatorfuncties bevat van de open blokken*

$$R = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d) \qquad (a_i < b_i,\ i = 1, \ldots, d) \tag{6.1}$$

dan bestaat L uit alle begrensde reëelwaardige Borel-functies op $\mathbb{R}^d$.

Bewijs Neem voor $\mathcal{C}$ de collectie van alle blokken R in (6.1) aangevuld met de lege verzameling. Dan brengt $\mathcal{C}$ de Borel-σ-algebra voort en is $\mathcal{C}$ gesloten onder eindige doorsneden. Dus L voldoet aan eisen 2, 3 en 4 in Stelling 6.8. Ook aan eis 1 (nl. $1 \in L$) is voldaan: Er is een rij open blokken R_n zo dat $1_{R_n} \uparrow 1$, Pas nu Stelling 6.8 toe. $\square$

Opmerking 6.10. Gevolg 6.9 blijft doorgaan als we in (6.1) i.p.v. open blokken gesloten blokken of half open, half gesloten blokken nemen. Voor $d = 1$ (dus werkend met functies op $\mathbb{R}$) blijft het gevolg ook doorgaan als we in (6.1) de halfrechten $(-\infty, c]$ ($c \in \mathbb{R}$) nemen.

Gevolg 6.11. *Zij X een metrische ruimte en zij L een monotoon gesloten lineaire ruimte van begrensde reëelwaardige Borel-functies op X. Als L de begrensde reëelwaardige continue functies op X bevat dan bestaat L uit alle begrensde reëelwaardige Borel-functies op X.*

Bewijs Neem voor $\mathcal{C}$ de collectie van alle open deelverzamelingen van X. Dan brengt $\mathcal{C}$ de Borel-σ-algebra voort en is $\mathcal{C}$ gesloten onder eindige doorsneden. L voldoet al aan eisen 1, 3 en 4 in Stelling 6.8. Voor eis 2 moeten we laten zien dat $1_O \in L$ als O open is. Dit is duidelijk als $O = \emptyset$ of X, dus veronderstel dat O en O^c niet leeg zijn. Definieer op X de functie

$$g(x) := d(y, O^c) := \inf_{y \in O^c} d(x, y).$$

Dan is g continu, want $|g(x_1) - g(x_2)| \leq d(x_1, x_2)$ (ga na). Ook is $g(x) > 0$ dan en slechts dan als $x \in O$. Dus $g_n := \min(ng, 1)$ is continu, $0 \leq g_n \leq 1$ en $g_n \uparrow 1_O$. Omdat L monotoon gesloten is, zal $1_O \in L$. Dus aan eisen 1–4 is voldaan. Pas nu Stelling 6.8 toe. □

Opmerking 6.12. Uit Gevolg 6.11 mogen we niet concluderen dat elke Borel-functie $f\colon X \to [0,1]$ de puntsgewijze limiet is van een stijgende rij continue functies $f_n\colon X \to [0,1]$. Zelfs als we niet eisen dat de rij (f_n) stijgend is, hoeft dit niet te gelden. Een tegenvoorbeeld wordt gegeven door de functie $f := 1_{\mathbb{Q}}$ op $\mathbb{R}$; zie Opgave 6.1.

6.3 Approximatie

In deze paragraaf leiden we uit Gevolg 6.11 af dat integreerbare Borel-functies vaak goed benaderd kunnen worden door continue functies.

Als f benaderd wordt door de functies ϕ_n in de zin dat $\int_X |f - \phi_n|\, d\mu \to 0$ en g door de functies ψ_n, dan wordt $f + g$ benaderd door $\phi_n + \psi_n$ en cf door de rij $c\phi_n$. Immers,

$$\int_X |(f+g) - (\phi_n + \psi_n)|\, d\mu \leq \int_X |f - \phi_n|\, d\mu + \int_X |g - \psi_n|\, d\mu,$$
$$\int_X |cf - c\phi_n|\, d\mu = |c| \int_X |f - \phi_n|\, d\mu.$$

Gevolg 6.13. *Zij μ een eindige maat op de Borel-σ-algebra $\mathcal{B}$ op de metrische ruimte X. Bij iedere μ-integreerbare functie $f\colon X \to \mathbb{R}$ bestaat er een rij begrensde continue functies $\phi_n\colon X \to \mathbb{R}$ zo dat $\int_X |f - \phi_n|\, d\mu \to 0$.*

Bewijs Het is voldoende de stelling te bewijzen voor begrensde functies f (ga na).

Zij L de verzameling van alle begrensde Borel-functies $f\colon X \to \mathbb{R}$ die goed te benaderen zijn met begrensde continue functies ϕ in de zin dat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een begrensde continue $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ bestaat zo dat $\int_X |f - \phi|\, d\mu < \varepsilon$. Dan is L een lineaire ruimte (zie boven) die de begrensde continue functies bevat.

We beweren dat L monotoon gesloten is: Stel $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq 1$ met $f_n \in L$. Zij $f(x) := \sup_n f_n(x)$. Te bewijzen: $f \in L$. Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Kies n zo groot dat $\int_X |f - f_n|\, d\mu < \varepsilon/2$. (Monotone convergentiestelling of Lebesgue met majorant $h \equiv 1$.) Kies nu $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ begrensd en continu zo dat $\int_X |f_n - \phi|\, d\mu < \varepsilon/2$. (Gebruik hier dat $f_n \in L$.) Dan geldt $\int_X |f - \phi|\, d\mu < \varepsilon$. Uit Gevolg 6.11 volgt dat L alle begrensde Borelfuncties bevat. □

Er bestaat een mooie theorie voor maten op compacte en locaal compacte Hausdorff-ruimten. We beperken ons hier tot het geval dat de ruimte een open deelverzameling is van $\mathbb{R}^d$.

Definitie 6.14. Zij $X \subset \mathbb{R}^d$ open. Een continue functie $f\colon X \to \mathbb{R}$ heeft *compacte drager* als er een compacte verzameling $K \subset X$ bestaat zo dat $f \equiv 0$ buiten K. Een maat ρ op de Borel-σ-algebra van X heet een *Radon-maat* als $\rho(K)$ eindig is voor compacte verzamelingen K.

Voorbeeld 6.15. Zij λ de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}^d$. De maat $d\rho(x) := \|x\|^\alpha \, d\lambda(x)$ is een Radon-maat op $\mathbb{R}^d$ voor $\alpha > -d$ en is een Radon-maat op $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ voor iedere $\alpha \in \mathbb{R}$.

Stelling 6.16 (Approximatiestelling)**.** *Zij W een open deelverzameling van $\mathbb{R}^d$ en ρ een Radon-maat op W. Bij iedere ρ-integreerbare functie $f\colon W \to \mathbb{R}$ is er een rij continue functies $\phi_n : W \to \mathbb{R}$, elk met compacte drager, zo dat $\int_W |f - \phi_n| \, d\rho \to 0$.*

Bewijs Het is voldoende te bewijzen dat een begrensde Borel-functie $f : W \to \mathbb{R}$ die nul is buiten een compacte deelverzameling $K \subset W$ willekeurig goed benaderd kan worden met continue functies ϕ met compacte drager (ga na).

Zij $\varepsilon > 0$. Kies eerst een continue functie $\chi\colon W \to [0,1]$ met compacte drager zo dat $\chi \equiv 1$ op K. Zij μ de eindige maat $d\mu := \chi \, d\rho$ op W. Kies $\psi\colon W \to \mathbb{R}$ begrensd en continu zo dat $\int_W |f - \psi| \, d\mu < \varepsilon$ (zie Gevolg 6.13). Zij $\phi = \chi\psi$. Dan geldt:

$$\int_W |f - \phi| \, d\rho = \int_W |f - \psi| \chi \, d\rho < \varepsilon. \qquad \square$$

Opmerking 6.17. Later zullen we de ruimten $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d, \mu)$ en $L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d, \mu)$ invoeren. De stelling hierboven zegt dat voor iedere Radon-maat μ op $\mathbb{R}^d$ de continue functies met compacte drager dicht liggen in de ruimte $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d, \mu)$. Op dezelfde wijze toont men aan dat de continue functies met compacte drager dicht liggen in $L^2(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d, \mu)$.

6.4 De Eenduidigheidsstelling

De Eenduidigheidsstelling, hieronder geformuleerd, volgt snel uit de Stelling van de Monotone Klasse.

Stelling 6.18 (Eenduidigheidsstelling)**.** *Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte met $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, waarbij $\mathcal{C}$ gesloten is onder eindige doorsneden en $X = \bigcup_{n=1}^\infty C_n$ voor zekere $C_n \in \mathcal{C}$. Laat μ en ν maten zijn op $(X, \mathcal{A})$ zo dat $\mu(C) = \nu(C) < \infty$ als $C \in \mathcal{C}$. Dan geldt $\mu = \nu$.*

Bewijs Zij $A \in \mathcal{A}$. Dan is A de vereniging van een rij disjuncte meetbare verzamelingen $A_n \subset C_n$ (ga na). Het is dus voldoende te bewijzen dat $\mu(A_n) = \nu(A_n)$ voor $n = 1, 2, \ldots$. Dit gaat met behulp van Stelling 6.8.

Definieer L_n als de verzameling van alle begrensde meetbare functies f met de eigenschap dat

$$\int_{C_n} f \, d\mu = \int_{C_n} f \, d\nu. \tag{6.2}$$

Dan voldoet L_n aan de vier voorwaarden van Stelling 6.8 (ga na), en dus geldt (6.2) voor de begrensde meetbare functie $f := 1_{A_n}$, dus $\mu(A_n) = \nu(A_n)$. $\square$

Voorbeeld 6.19. De eis in Stelling 6.18 dat $X = \bigcup_{n=1}^\infty C_n$ voor zekere $C_n \in \mathcal{C}$ is echt nodig. Neem maar de meetbare ruimte $(X, \mathcal{A})$ uit Voorbeeld 2.3c), dus $\mathcal{A} := \{A \subset X \mid A \text{ is aftelbaar of } A^c \text{ is aftelbaar}\}$. Dan $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$ met $\mathcal{C}$ de collectie van aftelbare deelverzamelingen van X (ga na). Dan is $\mathcal{C}$ gesloten onder eindige doorsneden, maar als X overaftelbaar is dan kan X geen aftelbare vereniging zijn van verzamelingen uit $\mathcal{C}$. Neem $X := \mathbb{R}$. De Lebesgue-maat en de nulmaat zijn verschillend op $\mathcal{A}$ maar vallen samen op $\mathcal{C}$.

Gevolg 6.20 (Uniciteit van de Lebesgue-maat)**.** *Er is hoogstens één maat μ op de Borel-σ-algebra $\mathcal{B}$ van $\mathbb{R}^d$ met de eigenshap*

$$\mu\Big((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]\Big) = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d) \qquad (a_i < b_i\ i = 1, \ldots, d).$$

Zo'n maat is ook translatie-invariant: $\mu(E + a) = \mu(E)$ als $E \in \mathcal{B}$, $a \in \mathbb{R}^d$.

Zo hebben we dus de uniciteitsuitspraak in Stelling 3.5 bewezen. Ook hebben we als gevolg van de Eenduidigheidsstelling de translatie-invariantie van de Lebesgue-maat nu sneller bewezen dan in Opgave 3.2 mogelijk was.

Gevolg 6.21. *Twee maten μ en ν op de Borel-σ-algebra van $\mathbb{R}$ zijn aan elkaar gelijk in elk van de volgende gevallen:*

1. *μ en ν zijn eindige maten en $\mu((-\infty, x]) = \nu((-\infty, x])$ voor elke $x \in \mathbb{R}$.*
2. *Voor elk gesloten begrensd interval I geldt dat $\mu(I) = \nu(I) < \infty$.*
3. *$\mu((-\infty, 0)) = \nu((-\infty, 0)) = 0$ en voor elke $x \geq 0$ geldt dat $\mu([0, x]) = \nu([0, x]) < \infty$.*

Ga in elk van de drie gevallen na welke collectie $\mathcal{C}$ genomen kan worden zo dat aan de voorwaarden in Stelling 6.18 is voldaan. Merk op dat geval 3 de voltooiing levert van het bewijs dat (5.12) geldt in Voorbeeld 5.14. Geval 1 geeft aanleiding tot een definitie:

Definitie 6.22. Zij μ een kansmaat op $\mathbb{R}$. De *verdelingsfunctie* van μ is de functie $F \colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ gegeven door

$$F(x) := \mu((-\infty, x]) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Gevolg 6.23. *Twee kansmaten op $\mathbb{R}$ met dezelfde verdelingsfunctie zijn aan elkaar gelijk.*

6.5 Verwisselen van integratievolgorde

De integraal van een meetbare functie $f(x, y)$ van twee reële variabelen kan men in principe op allerlei manieren berekenen:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, d\lambda_2(x, y) \quad \text{of} \quad \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, d\lambda(x) \right) d\lambda(y) \quad \text{of} \quad \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, d\lambda(y) \right) d\lambda(x).$$

Hierbij is λ de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}$ en λ_2 de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}^2$.

De Stelling van Fubini zegt dat de uitkomst van deze drie berekeningen hetzelfde is als f niet-negatief is. Door f eventueel te splitsen in een positief en een negatief deel, $f = f^+ - f^-$, vindt men hetzelfde resultaat voor integreerbare f.

De twee herhaalde integralen leveren dezelfde uitkomst op als f de indicatorfunctie is van een rechthoek $A \times B$ met A en B Borel-verzamelingen in $\mathbb{R}$ (ga na). Dat men niet altijd de integratievolgorde mag veranderen blijkt uit:

Voorbeeld 6.24.

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{(1 + x)^2}\, dx = \tfrac{1}{2},$$
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dx \right) dy = -\tfrac{1}{2}$$

(door in de onderste formule in het linkerlid x, y te hernoemen in y, x krijgen we min het linkerlid van de bovenste formule.) Dit is niet in tegenspraak met de Stelling van Fubini, want de dubbelintegralen zijn niet integreerbaar:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^1 \left|\frac{x-y}{(x+y)^3}\right| dy\right) dx &= \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy\right) dx + \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{y-x}{(x+y)^3}\, dy\right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{4x} + \int_0^1 \left(-\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{4x}\right) dx = \infty + \infty = \infty.\end{aligned}$$

6.6 De productruimte

Laat $(X, \mathcal{A})$ en $(Y, \mathcal{B})$ meetbare ruimten zijn. Dan is de definitie van $X \times Y$ als een meetbare ruimte analoog aan de definitie van de topologie op het directe product van twee topologische ruimten. We gebruiken de projecties $p_1 \colon (x, y) \mapsto x$ en $p_2 \colon (x, y) \mapsto y$ en we eisen dat dit meetbare afbeeldingen zijn (in het topologische geval werd geëist dat ze continu zijn). Equivalent nemen we de σ-algebra op $X \times Y$ die wordt voortgebracht door de collectie van deelverzamelingen $A \times B$ met $A \in \mathcal{A}$ en $B \in \mathcal{B}$.

Definitie 6.25. Laat $(X, \mathcal{A})$ en $(Y, \mathcal{B})$ meetbare ruimten zijn. Definieer de σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ op $X \times Y$ op een van de volgende drie equivalente manieren:

a) $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ is de kleinste σ-algebra op $X \times Y$ zo dat de afbeeldingen $p_1 \colon (x, y) \mapsto x \colon X \times Y \to X$ en $p_2 \colon (x, y) \mapsto y \colon X \times Y \to Y$ meetbaar zijn.

b) $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ is de σ-algebra op $X \times Y$ voortgebracht door de collectie van verzamelingen $A \times Y$ $(A \in \mathcal{A})$ en $X \times B$ $(B \in \mathcal{B})$.

c) $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ is de σ-algebra op $X \times Y$ voortgebracht door de collectie $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ van verzamelingen $A \times B$ $(A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B})$. (Pas op: we hebben hier dus een afwijkende definitie van $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.)

We noemen $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ de *product-σ-algebra*. Verwar $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ niet met $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. In het algemeen is $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ geen σ-algebra.

Ga na dat de voorwaarden a), b) en c) in Definitie 6.25 equivalent zijn.

Algemener kunnen we de σ-algebra op een direct product van willekeurig veel meetbare ruimten definiëren. Dit gaat ook met behulp van de projecties.

Definitie 6.26. Zij I een indexverzameling en $(X_i, \mathcal{A}_i)$ $(i \in I)$ een familie van meetbare ruimten. Noteer de productruimte als $X := \prod_{i \in I} X_i$ en zij $p_j \colon (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j \colon X \to X_j$ de projectie van X op X_j $(j \in I)$. Dan maken we X tot een meetbare ruimte $(X, \mathcal{A})$ door $\mathcal{A}$ te definiëren als de kleinste σ-algebra op X zo dat alle afbeeldingen p_i meetbaar zijn.
We noteren $\mathcal{A} = \bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$ en we noemen $\mathcal{A}$ de *product-σ-algebra*.

Als I eindig of aftelbaar oneindig is (dus $(X, \mathcal{A}) = (X_1 \times \cdots \times X_s, \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_s)$ of $(X, \mathcal{A}) = (X_1 \times X_2 \times \cdots, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \cdots)$) dan blijkt $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$ voortgebracht te worden door $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ (geef het bewijs):

Propositie 6.27. *Zij $(X, \mathcal{A})$ als in Definitie 6.26 en veronderstel dat I aftelbaar is. Dan is $\mathcal{A}$ de σ-algebra op X die wordt voortgebracht door de collectie van deelverzamelingen $\prod_{i \in I} A_i$ met $A_i \in \mathcal{A}_i$, dus door $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$.*

Voor $X := X_1 \times \cdots \times X_d$ met $(X_i, \mathcal{A}_i)$ $(i = 1, \ldots, d)$ meetbare ruimten, is de product-σ-algebra $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_d$ dus gegeven als de σ-algebra voortgebracht door $\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_d$.

Propositie 6.28. *Zij $X = X_1 \times \cdots \times X_d$ met $X_1, \ldots, X_d$ topologische ruimten met aftelbare basis van open verzamelingen en $\mathcal{B}_i$ de Borel-σ-algebra op X_i. Dan is de product-σ-algebra $\mathcal{B}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_d$ op X gelijk aan de Borel-σ-algebra $\mathcal{B}$ op X die behoort bij de product-topologie op X.*

Bewijs Omdat voor elke i X_i een topologische ruimte met aftelbare basis van open verzamelingen is, zal elke open deelverzameling van X een aftelbare vereniging zijn van verzamelingen van de vorm $A_1 \times \cdots \times A_d$ met A_i open in X_i. Hieruit volgt dat de σ-algebra op X voortgebracht door de open deelverzamelingen van X bevat is in de σ-algebra voortgebracht door $\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_d$.

Omgekeerd laten we zien dat voor elke i en elke $B_i \in \mathcal{B}_i$ geldt dat $p_i^{-1}(B_i) = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times B_i \times X_{i+1} \times \cdots \times X_d$ bevat is in de Borel-σ-algebra $\mathcal{B}$ op X. Immers, $p_i \colon X \to X_i$ is continu, dus meetbaar t.o.v. de Borel-σ-algebra's op X en X_i. Dus $p_i^{-1}(B_i) \in \mathcal{B}$. Nu kunnen we concluderen dat $\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_d \subset \mathcal{B}$, dus ook $\mathcal{B}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_d = \sigma(\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_d) \subset \mathcal{B}$. $\square$

Gevolg 6.29. *De Borel-σ-algebra $\mathcal{B}_{(d)}$ op $\mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ is de product-σ-algebra van d kopieën van de Borel-σ-algebra $\mathcal{B}$ op $\mathbb{R}$, dus $\mathcal{B}_{(d)} = \mathcal{B} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}$.*

Voor het gemak beperken we ons nu verder tot de productruimte $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ van twee meetbare ruimten $(X, \mathcal{A})$ en $(Y, \mathcal{B})$.

Propositie 6.30. *Zij h een meetbare afbeelding van de meetbare productruimte $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ naar de meetbare ruimte $(Z, \mathcal{C})$. Dan is voor elke $y \in Y$ de afbeelding $h_y \colon x \mapsto h(x, y) \colon X \to Z$ meetbaar op $(X, \mathcal{A})$ (en analoog voor $h_x \colon y \mapsto h(x, y)$).*

Bewijs Definieer voor $y \in Y$ de afbeelding $j_y \colon x \mapsto (x, y) \colon X \to X \times Y$. Dan is j_y meetbaar wegens het Meetbaarheidslemma (Lemma 2.11); ga na. Dus $h_y = h \circ j_y$ is ook meetbaar. $\square$

Laat nu $(X, \mathcal{A}, \mu)$ en $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ twee maatruimten zijn en zij $h \colon X \times Y \to [0, \infty]$ meetbaar op de product-σ-algebra. De functies

$$f(x) := \int_Y h(x, y)\, d\nu(y) \qquad \text{en} \qquad g(y) := \int_X h(x, y)\, d\mu(x)$$

zijn dan wegens Propositie 6.30 goed gedefinieerde niet-negatieve functies op X resp. Y. Het zou prettig zijn als deze functies meetbaar zijn en als $\int_X f\, d\mu = \int_Y g\, d\nu$, zodat de integraal niet afhangt van de integratievolgorde. De Stelling van Fubini zegt dat dit inderdaad onder zekere voorwaarden het geval is. Om die voorwaarden te motiveren geven we eerst een voorbeeld waar het misgaat.

Voorbeeld 6.31. Zij λ de Lebesgue-maat op de Borel-σ-algebra $\mathcal{B}$ voor $\mathbb{R}$ en zij τ de telmaat op de σ-algebra $2^{\mathbb{R}}$ van alle deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. We werken op de productruimte $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathcal{B} \otimes 2^{\mathbb{R}})$.

Zij eerst $h \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de indicatorfunctie van de diagonaal $D = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ (een meetbare verzameling; ga na). Dan geldt $f(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x, y)\, d\tau(y) = 1$ voor iedere x en $g(y) = \int_{\mathbb{R}} h(x, y)\, d\lambda(x) = 0$ voor iedere y. De herhaalde integralen zijn niet aan elkaar gelijk: $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = \infty \neq 0 = \int_{\mathbb{R}} g\, d\tau$.

Zij nu h de indicatorfuntie van de doorsnede van de diagonaal D hierboven en de verzameling $\mathbb{R} \times S$ waarbij S een deelverzameling is van $\mathbb{R}$ die niet Borel-meetbaar is. Dan is $D \cap S$ meetbaar en $D \cap S = \{(x, x) \mid x \in S\}$. Er geldt $f(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x, y) d\tau(y) = 1$ als $x \in S$ en anders $f(x) = 0$ (ga na). Dus $f = 1_S$, een functie die niet meetbaar is op $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

Bovenstaande twee, wat ongewenste conclusies hangen samen met het feit dat de maatruimte $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}}, \tau)$ niet σ-eindig is. We zullen hieronder bij de Stelling van Fubini σ-eindigheid eisen.

6.7 De Stelling van Fubini, versie 1

Stelling 6.32 (Stelling van Fubini 1)**.** *Laat* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *en* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *σ-eindige maatruimten zijn. Laat* $h\colon X \times Y \to [0, \infty]$ *meetbaar zijn t.o.v.* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$*. Definieer*

$$g(y) := \int_X h(x, y)\, d\mu(x) \quad (y \in Y), \qquad f(x) := \int_Y h(x, y)\, d\nu(y) \quad (x \in X). \tag{6.3}$$

Dan geldt:

A) g *is meetbaar op* $(Y, \mathcal{B})$*;*

B) f *is meetbaar op* $(X, \mathcal{A})$*;*

C) $\int_Y g(y)\, d\nu(y) = \int_X f(x)\, d\mu(x)$*.*

Bewijs Het bewijs verloopt in drie stappen. In de tweede stap bewijzen we het resultaat voor het geval van eindige maten μ, ν door met behulp van de Stelling van de Monotone Klasse te laten zien dat dan A), B) en C) gelden voor alle begrensde reëelwaardige meetbare functies h.

Stap 1 Als $h := 1_{A \times B}$ met $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ en $\mu(A)$ en $\nu(B)$ eindig, dan geldt $f = \nu(B)\, 1_A$, $g = \mu(A)\, 1_B$, dus f en g zijn meetbaar en $\int_X f\, d\mu = \mu(A)\, \nu(B) = \int_Y g\, d\nu$.

Stap 2 Veronderstel dat $\mu(X)$ en $\nu(Y)$ eindig zijn. We werken met functies $h\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ die meetbaar en begrensd zijn. Dan kunnen f en g goed gedefinieerd worden door (6.3). Zij zullen reëelwaardig en begrensd zijn. Als bovendien f en g meetbaar zijn op $(X, \mathcal{A})$ resp. $(Y, \mathcal{B})$ dan zullen ze dus integreerbaar zijn t.o.v. μ resp. ν en zullen het linker- en rechterlid van C) goed gedefinieerde reële getallen zijn.

Laat nu $\mathcal{C}$ de collectie van deelverzamelingen $C \times D$ van $X \times Y$ zijn met $C \in \mathcal{A}$, $D \in \mathcal{B}$. Dan brengt $\mathcal{C}$ de σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ voort en $\mathcal{C}$ is gesloten onder eindige doorsneden. Laat L de ruimte zijn van alle functies $h\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ die meetbaar en begrensd zijn en waarvoor A), B) en C) gelden. Nu voldoet L aan voorwaarden 1–4 van de Stelling van de Monotone Klasse (Stelling 6.8). Voorwaarden 1 en 2 volgen uit Stap 1; ga zelf voorwaarde 3 na. We controleren voorwaarde 4. Laat $0 \le h_n \le 1$ met (h_n) een stijgende rij van functies in L. Laat f_n en g_n gedefinieerd zijn in termen van h_n door (6.3). Dus A), B) en C) gelden voor f_n, g_n. Dan $h_n \uparrow h$, dus h meetbaar en $0 \le h \le 1$. Laat f en g gedefinieerd zijn in termen van h door (6.3). Uit de Stelling van de Monotone Convergentie volgt dat $f_n \uparrow f$ en $g_n \uparrow g$, dus f en g zijn meetbaar. Omdat C) geldt voor f_n, g_n volgt wederom met de Stelling van de Monotone Convergentie dat C) geldt voor f, g. Dus $h \in L$, dus er is voldaan aan voorwaarde 4) in Stelling 6.8.

We concluderen met behulp van Stelling 6.8 dat A), B) en C) in het geval van eindige maten μ en ν gelden voor alle begrensde reëelwaardige meetbare functies h op $X \times Y$.

Stap 3 De maten μ en ν zijn σ-eindig, dus er zijn stijgende rijen $A_n \uparrow X$ in $\mathcal{A}$ en $B_n \uparrow Y$ in $\mathcal{B}$ met $\mu(A_n) < \infty$ en $\nu(B_n) < \infty$. Zij nu $h\colon X \times Y \to [0, \infty]$ meetbaar. Definieer $h_n := 1_{A_n \times B_n} \min(h, n)$. Dan gelden A), B) en C) voor h_n op grond van Stap 2 (ga na). Omdat $h_n \uparrow h$, zal $f_n \uparrow f$ en $g_n \uparrow g$ wegens de Stelling van de Monotone Convergentie. Dus A) en B) gelden voor f, g. Dan volgt C) voor f, g uit de Stelling van de Monotone Convergentie. $\square$

6.8 De productmaat

Definitie 6.33. Laat $(X, \mathcal{A}, \mu)$ en $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-eindige maatruimten zijn. De *productmaat* op $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ is de functie $\mu \times \nu \colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, \infty]$ die wordt gegeven door

$$(\mu \times \nu)(C) := \int_X \Big(\int_Y 1_C(x, y)\, d\nu(y) \Big)\, d\mu(x) \quad (C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}). \tag{6.4}$$

Stelling 6.34. *Onder de aannamen van Definitie 6.33 is $\mu \times \nu$ een maat op $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. Bovendien is het de unieke maat ρ op $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ met de eigenschap dat*

$$\rho(A \times B) = \mu(A)\, \nu(B) \quad \textit{voor alle } a \in \mathcal{A} \textit{ en } B \in \mathcal{B} \textit{ met } \mu(A) < \infty \textit{ en } \nu(B) < \infty.$$

Bewijs Eerst gaan we na dat (6.4) een maat op $X \times Y$ definieert. Duidelijk geldt $(\mu \times \nu)(C) \in [0, \infty]$ en $(\mu \times \nu)(\emptyset) = 0$. Als $C = \bigcup_n C_n$ met C_n meetbaar en disjunct, dan zien we dat $(\mu \times \nu)(C) = \sum_n (\mu \times \nu)(C_n)$ door voor $1_C = \sum_n 1_{C_n}$ de som $\sum_n$ in (6.4) eerst met $\int_Y$ en dan met $\int_X$ te verwisselen.

Duidelijk geldt dat $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ als $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ en $\mu(A), \nu(B)$ eindig. Laat ρ ook een maat zijn op $X \times Y$ zijn waarvoor de aanname in de stelling geldt. Nu passen we de Eenduidigheidsstelling (Stelling 6.18) toe waarbij we voor $\mathcal{C}$ de collectie nemen van alle verzamelingen $A \times B$ met $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ en $\mu(A), \nu(B)$ eindig. Deze collectie is gesloten onder eindige doorsneden. Ook is iedere $A \times B$ met A, B meetbaar (dus i.h.b. $X \times Y$) een aftelbare vereniging van verzamelingen $A_n \times B_n$ uit $\mathcal{C}$ wegens de σ-eindigheid van μ en ν. Dus $\mathcal{C}$ brengt $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ voort. Nu is aan de voorwaarden van Stelling 6.18 voldaan. We concluderen dat $\rho = \mu \times \nu$. □

Gevolg 6.35. *Onder de aannamen van Stelling 6.32 geldt:*

$$\int_{X \times Y} h\, d(\mu \times \nu) = \int_X \Big(\int_Y h(x, y)\, d\nu(y) \Big)\, d\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X h(x, y)\, d\mu(x) \Big)\, d\nu(y). \tag{6.5}$$

Bewijs We hoeven alleen nog maar de eerste identiteit te bewijzen. Deze geldt voor $h := 1_C$ $(C \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. Dus ook voor $h = \sum_n a_n 1_{C_n}$ $(C_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B},\ a_n > 0)$ wegens Propositie 4.1. Gebruik nu Stelling 2.32. □

Ga na dat uit Stelling 6.34 ook volgt:

Gevolg 6.36. *Zij λ_d de Borel-Lebesguemaat op $\mathbb{R}^d$. Dan $\lambda_k \times \lambda_m = \lambda_{k+m}$.*

6.9 De Stelling van Fubini, versie 2

Stelling 6.37 (Stelling van Fubini 2)**.** *Laat $(X, \mathcal{A}, \mu)$ en $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-eindige maatruimten zijn. Laat $h \colon X \times Y \to \mathbb{C}$ meetbaar zijn t.o.v. $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Veronderstel dat*

$$\int_X \Big(\int_Y |h(x, y)|\, d\nu(y) \Big)\, d\mu(x) < \infty \quad \text{of} \quad \int_Y \Big(\int_X |h(x, y)|\, d\mu(x) \Big)\, d\nu(y) < \infty \tag{6.6}$$

d.w.z. dat h integreerbaar is t.o.v. $\mu \times \nu$. Dan geldt:

1. *$h(x, .)$ is integreerbaar t.o.v. ν voor bijna alle x, dus voor x buiten zekere verzameling $A \in \mathcal{A}$ met $\mu(A) = 0$;*
   $h(\,.\,, y)$ is integreerbaar t.o.v. μ voor bijna alle y, dus voor y buiten zekere verzameling $B \in \mathcal{B}$ met $\nu(B) = 0$.

2. Definieer functies g op Y en f op X zo dat $g|_B := 0$, $f|_A := 0$ en

$$g(y) := \int_X h(x,y)\,d\mu(x) \quad (y \in Y \backslash B), \qquad f(x) := \int_Y h(x,y)\,d\nu(y) \quad (x \in X \backslash A).$$

Dan geldt: g is integreerbaar t.o.v. ν, f is integreerbaar t.o.v. μ en

$$\int_{X\times Y} h\,d(\mu\times\nu) = \int_Y g(y)\,d\nu(y) = \int_X f(x)\,d\mu(x).$$

Bewijs We reduceren het bewijs van deze stelling tot de reeds bewezen stelling van Fubini 1 (Stelling 6.32). De reductie van het bewijs van Fubini 2 voor complexwaardige functies tot Fubini 2 voor reëelwaardige functies is probleemloos (ga zelf na). We reduceren nu het bewijs van Fubini 2 voor reëelwaardige functies tot Fubini 1. Dus we hebben de aannamen van Fubini 2, waarbij $h\colon X\times Y \to \mathbb{R}$ meetbaar en zo dat

$$\int_X \Big(\int_Y |h(x,y)|\,d\nu(y)\Big)\,d\mu(x) < \infty.$$

Schrijf $h = h^+ - h^-$, dan $0 \le h^\pm \le |h|$, dus

$$\infty > \int_X \Big(\int_Y h^\pm(x,y)\,d\nu(y)\Big)\,d\mu(x) = \int_Y \Big(\int_X h^\pm(x,y)\,d\mu(x)\Big)\,d\nu(y) = \int_{X\times Y} h^\pm\,d(\mu\times\nu),$$

waarbij de ongelijkheid volgt uit de aannamen en de gelijkheden volgen uit Fubini 1. Dus de functies $x \mapsto \int_Y h^\pm(x,y)\,d\nu(y)$ en $y \mapsto \int_X h^\pm(x,y)\,d\mu(x)$ zijn integreerbaar en bijna overal eindig, dus de functies $x \mapsto \int_Y \big(h^+(x,y) - h^-(x,y)\big)\,d\nu(y)$ en $y \mapsto \int_X \big(h^+(x,y) - h^-(x,y)\big)\,d\mu(x)$ zijn bijna overal goed gedefinieerd en ze zijn integreerbaar. Fubini 2 volgt nu door in bovenstaande formule de gelijkheden voor h^+ en de gelijkheden voor h^- van elkaar af te trekken. $\square$

Opmerking 6.38. In de praktijk moet je op de volgende manier omgaan met Stelling 6.37. Laat $(X, \mathcal{A}, \mu)$ en $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ-eindige maatruimten zijn. Laat $h\colon X\times Y \to \mathbb{C}$ meetbaar zijn t.o.v. $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Stel dat je een van de drie leden van (6.5) krijgt aangeboden. Je weet nog niet of de integraal (bij het eerste lid) of de binnen- en buitenintegraal (bij het tweede of derde lid) goed gedefinieerd zijn. De opdracht is om de integreerbaarheid na te gaan, en om de integralen zo mogelijk expliciet uit te rekenen. Het recept voor de achtereenvolgende stappen is:

1. Ga voor een van de twee ongelijkheden in (6.6) na of die geldt. Dit zou je kunnen doen door eerst de binnenintegraal uit te rekenen als functie van x (of van y) en dan de buitenintegraal. Soms kun je ook een bovenschatting (nog van x of y afhangend) voor de binnenintegraal geven, die je met de buitenintegraal probeert uit te rekenen als iets eindigs, of waarvoor je de buitenintegraal naar boven probeert af te schatten door iets eindigs.

2. Nu gelden alle conclusies over integreerbaarheid uit Stelling 6.37 en je weet dat de drie leden van (6.5) aan elkaar gelijk zijn. Als je die expliciet wilt uitrekenen, begin dan met de binnenintegraal in het tweede of in het derde lid. Als de ene binnenintegraal niet lukt dan probeer je de andere binnenintegraal. Als een binnenintegraal (bijna overal) uit te rekenen valt dan kun je vervolgens proberen de bijbehorende buitenintegraal uit te rekenen.

We krijgen een speciaal geval van Stelling 6.37 door te nemen: $Y := \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ met ν de telmaat. Schrijf $h_n(x) := h(x, n)$ voor een meetbare functie $h\colon X \times Y \to \mathbb{C}$. Dan kunnen we Fubini 2 als volgt formuleren in dit geval:

Gevolg 6.39. *Stel dat $h_n\colon X \to \mathbb{C}$ meetbaar is voor elke $n \in \mathbb{N}$ en dat $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |h_n|\, d\mu < \infty$. Dan zijn de functies h_n integreerbaar en $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ convergeert bijna overal en levert een integreerbare functie op. Dan*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X h_n\, d\mu = \int_X \Big(\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} h_n\Big)\, d\mu.$$

Dit resultaat kenden we al als gevolg van de Stelling van de Gedomineerde Convergentie; zie Stelling 4.2.

Een nog specialer geval van Fubini 2 krijgen we door in Stelling 6.37 $X = Y := \mathbb{N}$ te nemen met μ en ν de telmaat op $\mathbb{N}$. Schrijf $h_{m,n} := h(m, n)$ voor een functie $h\colon X \times Y \to \mathbb{C}$. Die is altijd meetbaar. Dan kunnen we Fubini 2 als volgt formuleren in dit geval.

Gevolg 6.40. *Veronderstel dat $\sum_{m,n=1}^{\infty} |h_{m,n}| < \infty$. Dan geldt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{m=1}^{\infty} h_{m,n}\Big) = \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} h_{m,n}\Big)$$

met alle vier de sommaties absoluut convergent.

Dit resultaat kan al bij de behandeling van reeksen in een eerder vak Analyse geformuleerd en bewezen worden; zie Theorem 2.58 in het boek van Browder [4].

6.10 Opgaven

Opgave* 6.1. Laat zien dat er geen rij van continue functies $f_n\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ is die puntsgewijs convergeert naar $1_{\mathbb{Q}}$. Want stel wel. Bereik dan een tegenspraak in de volgende stappen.

a) Definieer voor $n = 1, 2, \ldots$ de verzamelingen

$$U_n := \bigcup_{m \geq n} \{f_m > \tfrac{3}{4}\}, \qquad V_n := \bigcup_{m \geq n} \{f_m < \tfrac{1}{4}\},$$

en laat zien dat elk van deze open verzamelingen dicht ligt in $\mathbb{R}$.

b) De Stelling van Baire (zie Lineaire Analyse) zegt dat in een volledige metrische ruimte de doorsnede van aftelbaar veel open dichte verzamelingen weer dicht ligt.

c) Er is een punt x_0 dat in alle verzamelingen U_n en V_n ligt.

d) $f_n(x_0) > \frac{3}{4}$ oneindig vaak en $f_n(x_0) < \frac{1}{4}$ oneindig vaak.

Opgave* 6.2. Zij $\mathcal{K}_n$ de verzameling van alle kubussen in $\mathbb{R}^d$ van de vorm

$$\prod_{i=1}^{d} [2^{-n} k_i, 2^{-n}(k_i + 1)) \qquad (k_1, \ldots, k_d \in \mathbb{Z}).$$

Zij $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integreerbaar en zij $\varepsilon > 0$. Laat zien dat er een $n \in \{1, 2, \ldots\}$ is en een simpele functie $t := \sum_{j=1}^{q} c_j 1_{K_j}$ met $c_1, \ldots, c_q \in \mathbb{R}$ en $K_1, \ldots, K_q$ in $\mathcal{K}_n$ zo dat $\int_{\mathbb{R}^d} |f - t|\, d\lambda < \varepsilon$.

Opgave 6.3. Laat $R > 0$ en $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq R^2\}$. Bewijs dat $\lambda_2(B) = \pi R^2$ door $\int_{\mathbb{R}^2} 1_B \, d\lambda_2$ met behulp van $\lambda_2 = \lambda \times \lambda$ en Fubini uit te rekenen.

Opgave 6.4. Bewijs met behulp van Fubini dat

$$\int_{[0,\infty)} \frac{\sin x}{x} \left(\frac{1 - e^{-x}}{x} - e^{-x} \right) d\lambda(x) = \tfrac{1}{2} \log 2.$$

Opgave 6.5. Bewijs met behulp van Fubini dat

$$\lim_{A \to \infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x} \, dx = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Opgave 6.6. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een σ-eindige maatruimte en zij $f \colon X \to \mathbb{R}$ μ-integreerbaar.

a) Definieer de functie $F \colon (0, \infty) \to [0, \infty]$ door

$$F(t) := \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > t\}) \quad (0 < t < \infty).$$

Laat zien dat deze functie goed gedefinieerd is en dat $0 \leq F(t) < \infty$.

b) Zij $\mathcal{B}$ de Borel-σ-algebra op $(0, \infty)$. Laat zien dat de verzameling $E := \{(x, t) \in X \times (0, \infty) \mid |f(x)| > t\}$ in de product-σ-algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ ligt.

c) Zij λ de Lebesgue-maat op $(0, \infty)$. Bewijs met behulp van Fubini dat de functie $F \colon (0, \infty) \to [0, \infty)$ Borel-meetbaar is en dat

$$\int_{(0,\infty)} F(t) \, d\lambda(t) = \int_X |f(x)| \, d\mu(x).$$

7 De ruimten L^1, L^2 en L^∞

7.1 De ruimten $\mathcal{L}$ en L

Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en zij $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X, \mathcal{A})$ de verzameling van alle complexwaardige meetbare functies op $(X, \mathcal{A})$. We maken vaak geen onderscheid tussen twee functies die μ-b.o. gelijk zijn. Dan is het handig om te werken met de equivalentierelatie "$f = g$ b.o." op $\mathcal{L}$ (zie Propositie 3.31). We geven de verzameling van de equivalentieklassen in $\mathcal{L}$ aan met $L = L(X, \mathcal{A}, \mu)$. Elementen van $\mathcal{L}$ zijn dus niet functies, maar equivalentieklassen van functies. De verzameling L hangt alleen af van de σ-algebra $\mathcal{A}$ en niet van de maat μ, de verzameling L hangt wel af van de maat μ.

Voorbeeld 7.1. Zij μ de nulmaat op een meetbare ruimte $(X, \mathcal{A})$. Dan bestaat $L(X, \mathcal{A}, \mu)$ maar uit één element: elke meetbare functie is een nulfunctie en zit in dezelfde equivalentieklasse.

7.2 Eenvoudige eigenschappen van L

We geven een aantal eenvoudige maar belangrijke eigenschappen van $L(X, \mathcal{A}, \mu)$. De hieronder vermelde f_i, g_i, etc. zijn elementen van $\mathcal{L}(X, \mathcal{A})$.

1. Als $f_1 = g_1$ b.o. en $f_2 = g_2$ b.o. dan $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ b.o. en $f_1 f_2 = g_1 g_2$ b.o. .
   Dus L is een lineaire ruimte en L is gesloten onder vermenigvuldiging.
   Inderdaad, als bijvoorbeeld $f_1(x) + f_2(x) \neq g_1(x) + g_2(x)$ dan $f_1(x) \neq f_2(x)$ of $g_1(x) \neq g_2(x)$, dus $\{f_1 + f_2 \neq g_1 + g_2\} \subset \{f_1 \neq f_2\} \cup \{g_1 \neq g_2\}$. Nu zijn $\{f_1 \neq f_2\}$ en $\{g_1 \neq g_2\}$ bevat in nulverzamelingen, dus $\{f_1 + f_2 \neq g_1 + g_2\}$ is bevat in een nulverzameling, dus $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ b.o. .

2. Zij $\phi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ een Borel-functie. Als $f_i = g_i$ b.o. voor $i = 1, \ldots, n$ dan $\phi(f_1, \ldots, f_n) = \phi(g_1, \ldots, g_n)$ b.o. .
   Inderdaad, als $\phi(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \neq \phi(g_1(x), \ldots, g_n(x))$ dan geldt $(f_1(x), \ldots, f_n(x)) \neq (g_1(x), \ldots, g_n(x))$, dus er is een i zo dat $f_i(x) \neq g_i(x)$. Dus $\{\phi(f_1, \ldots, f_n) \neq \phi(g_1, \ldots, g_n)\} \subset \bigcup_i \{f_i \neq g_i\}$.
   Als $u_1, \ldots, u_n \in L$, dan is dus $\phi(u_1, \ldots, u_n) \in L$ goed gedefinieerd. Er gelden de equivalenties:
   $u = \phi(u_1, \ldots, u_n)$ in $L \iff$ er zijn representanten $f_1, \ldots, f_n, f$ in $\mathcal{L}$ van resp. $u_1, \ldots, u_n, u$ zo dat $f = \phi(f_1, \ldots, f_n)$ b.o. $\iff$ voor alle representanten $f_1, \ldots, f_n, f$ in $\mathcal{L}$ van resp. $u_1, \ldots, u_n, u$ geldt $f = \phi(f_1, \ldots, f_n)$ b.o. .

   In het bijzonder kunnen we spreken over de absolute waarde $|u|$, het reële deel $\operatorname{Re} u$, en de complex toegevoegde $\overline{u}$, van een element $u \in L$, en ook over de som en het product van twee elementen in L; vergelijk item 1.

3. Als $f_n = g_n$ b.o. voor $n = 1, 2, \ldots$ en $f_n \to f_0$ b.o. dan:
   $g_n \to g_0$ b.o. $\iff f_0 = g_0$ b.o. (ga na).
   Dus we kunnen zeggen:
   $u_n \to u_0$ in $L \iff$ er zijn representanten $f_0, f_1, \ldots$ in $\mathcal{L}$ van resp. $u_0, u_1, \ldots$ zo dat $f_n \to f_0$ b.o. $\iff$ voor alle representanten $f_0, f_1, \ldots$ in $\mathcal{L}$ van resp. $u_0, u_1, \ldots$ geldt $f_n \to f_0$ b.o. .

4. Als $f = g$ b.o. en f is integreerbaar dan is g integreerbaar en $\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu$ (ga na, zie Gevolg 3.29 voor het geval dat $f \geq 0$).

Dus we kunnen zeggen voor $u \in L$, $C \in \mathbb{C}$:
$\int_X u\, d\mu = C \iff$ er is een representant f van u zo dat $\int_X f\, d\mu = C \iff$ voor alle representanten f van u geldt $\int_X f\, d\mu = C$.

De verzamelingen $\mathcal{L}$ en L zijn slechts ingevoerd om straks de Banach-ruimten L^1 en L^∞ en de Hilbert-ruimte L^2 te kunnen definiëren en om het onderscheid tussen functie en equivalentieklasse van b.o. gelijke functies duidelijk te maken. De notaties $\mathcal{L}$ en L zijn alleen voor gebruik binnen dit hoofdstuk, niet algemeen in gebruik in de wiskunde. Maar de notaties L^1, L^2 en L^∞ zijn standaard in de wiskunde.

We zullen het onderscheid tussen een functie en zijn equivalentieklasse in dit hoofdstuk streng handhaven, en dus telkens representanten kiezen en daarna weer overgaan op equivalentieklassen. In de literatuur is men daar (terecht) nogal slordig mee.

7.3 De ruimte $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$

Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Definieer

$$\|f\|_1 := \int_X |f|\, d\mu \qquad (f \in \mathcal{L}),$$

en definieer $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ als de ruimte van alle functies $f \in \mathcal{L}$ met $\|f\|_1 < \infty$, of equivalent als de ruimte van alle complexwaardige integreerbare functies op $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dan is $\mathcal{L}^1$ een complexe lineaire ruimte (zie Stelling 3.38) en $\|\,.\,\|_1$ is een *seminorm* op $\mathcal{L}$:

1. $0 \le \|f\|_1 < \infty$,
2. $\|f + g\|_1 \le \|f\|_1 + \|g\|_1$,
3. $\|cf\|_1 = |c|\, \|f\|_1$.

Maar er geldt in het algemeen niet: $\|f\|_1 = 0 \implies f = 0$. Neem bijvoorbeeld $f = 1_N$ met N een niet-lege nulverzameling.

Er geldt voor $f, g \in \mathcal{L}$:

$$f = g \text{ b.o.} \implies |f| = |g| \text{ b.o.} \implies \|f\|_1 = \|g\|_1.$$

Daarom zullen, als $f \in \mathcal{L}^1$, alle g uit de equivalentieklasse $u \in L$ van f, in $\mathcal{L}^1$ liggen. We definiëren $L^1 = L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ als de ruimte van alle $u \in L$ zo dat $f \in \mathcal{L}^1$ als f in de equivalentieklasse u ligt en we definiëren voor $u \in L^1$ $\|u\|_1 := \|f\|_1$ als f in de equivalentieklasse u ligt. Nu is $\|\,.\,\|_1$ een *norm* op L:

1. $0 \le \|u\|_1 < \infty$,
2. $\|u + v\|_1 \le \|u\|_1 + \|v\|_1$,
3. $\|cu\|_1 = |c|\, \|u\|_1$,
4. $\|u\|_1 = 0 \implies u = 0$ (wegens Propositie 3.28).

De lineaire ruimte L^1 van de equivalentieklassen van integreerbare functies gedraagt zich in dit opzicht dus beter dan de lineaire ruimte $\mathcal{L}^1$ van de integreerbare functies. Men zou allerlei stellingen voor integreerbare functies opnieuw kunnen bewijzen voor L^1, en de theorie uit de voorgaande hoofdstukken formuleren voor elementen van L en L^1, in plaats voor meetbare en integreerbare complexwaardige functies. We doen dit niet. We blijven steeds werken met functies en niet met equivalentieklassen van b.o. gelijke functies. Waar nodig kiezen we representanten en controleren eventueel dat het resultaat niet van de keuze van de representanten afhangt.

Opmerking 7.2. In het algemeen, als $\mathcal{L}$ een complexe lineaire ruimte is met daarop een seminorm $\|\,.\,\|$, dan kunnen we een genormeerde lineaire ruimte L construeren als een quotiëntruimte van $\mathcal{L}$. Laat $\mathcal{L}_0$ bestaan uit alle $f \in \mathcal{L}$ waarvoor $\|f\| = 0$. Dan is $\mathcal{L}_0$ een lineaire deelruimte van $\mathcal{L}$ (ga na). Definieer de *quotiëntruimte* $L = \mathcal{L}/\mathcal{L}_0$ als de verzameling van alle nevenklassen $f + \mathcal{L}_0$ ($f \in \mathcal{L}$). Definieer $\|f + \mathcal{L}_0\| := \|f+g\|$ met $g \in \mathcal{L}_0$ willekeurig (de definitie is onafhankelijk van de keuze van g). Dan is L een genormeerde lineaire ruimte (ga na).

We kunnen ook op deze manier L_1 uit $\mathcal{L}_1$ maken. Het resultaat is equivalent aan de methode met equivalentieklassen van b.o. gelijke integreerbare functies.

7.4 De volledigheid van L^1

Een metrische ruimte is *volledig* als iedere *fundamentaalrij* convergeert. Een *Banach-ruimte* is een genormeerde lineaire ruimte die volledig is. Volledigheid is van groot praktisch belang. Het garandeert dat een rij punten die lijkt te convergeren (fundamentaalrij) ook werkelijk convergeert. Al weet je dan in eerste instantie maar van betrekkelijk weinig elementen van zo'n Banach-ruimte dat ze er echt in zitten (bijvoorbeeld alleen van de polynomen in een Banach-ruimte van functies), dan weet je door de volledigheid dat er veel meer elementen in moeten zitten, nl. de limieten van de fundamentaalrijen gevormd met die elementen.

Volledigheid wordt hieronder steeds in twee stappen bewezen:

1. Met een slimme constructie wordt van een deelrij aangetoond dat die b.o. convergeert.

2. Van die b.o.-limietfunctie wordt aangetoond dat hij ook limiet is in de zin van de norm waarmee we werken.

Voor genormeerde lineaire ruimten geldt volgens onderstaande propositie volledigheid zodra we kunnen bewijzen dat een reeks van vectoren convergeert als de bijbehorende reeks van normen convergeert. Ga eerst het bewijs van onderstaand lemma na.

Lemma 7.3. *Zij (X, d) een metrische ruimte en (x_n) een fundamentaalrij in X. Als een deelrij van de rij (x_n) convergeert naar een limiet $x \in X$ dan convergeert de hele rij (x_n) naar x.*

Lemma 7.4. *Zij $(E, \|\,.\,\|)$ een genormeerde lineaire ruimte. Zij (x_n) een fundamentaalrij in E. Dan heeft (x_n) een deelrij van vectoren (x_{n_k}) zo dat $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| < \infty$.*

Bewijs Kies achtereenvolgens $n_1, n_2, \ldots$ zo dat $n_1 < n_2 < \ldots$ en $\|x_l - x_{n_k}\| < 2^{-k}$ als $l > n_k$. Dan $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}$, dus $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 1 < \infty$. □

Propositie 7.5. *Zij $(E, \|\,.\,\|)$ een genormeerde lineaire ruimte. Stel dat voor iedere rij $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ in E met $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\| < \infty$ er een $s \in E$ bestaat zo dat $\|u_1 + \cdots + u_n - s\| \to 0$. Dan is E volledig.*

Bewijs Zij (x_n) een fundamentaalrij in E. We moeten bewijzen dat de rij convergeert naar een limiet. Volgens Lemma 7.4 heeft (x_n) een deelrij (x_{n_k}) zo dat $\|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \infty$. Volgens de aanname is er een $s \in E$ zo dat $\|x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \cdots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) - s\| \to 0$ voor $k \to \infty$. Dus $\|x_{n_k} - s\| \to 0$. Volgens Lemma 7.3 convergeert dan ook de rij (x_n) naar s. □

Stelling 7.6. *Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Dan is $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ een Banach-ruimte.*

Bewijs Zij (u_n) een rij in L^1 met $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_1 < \infty$. Neem voor elke n een representant $f_n \in \mathcal{L}^1$ van de equivalentieklasse u_n. Dan is $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty$. Volgens Stelling 4.2 is er dan een $g \in \mathcal{L}$ zo dat $\int_X |f_1 + \cdots + f_n - g| \, d\mu \to 0$. Laat g behoren tot de equivalentieklasse $s \in L^1$. Dan $\|u_1 + \cdots + u_n - s\|_1 \to 0$. Volgens Propositie 7.5 is L^1 dan volledig. □

Uit Lemma 7.4 en Stelling 7.6 kunnen we nog een ander interessant resultaat halen:

Propositie 7.7. *Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Laat (f_n) een rij functies zijn in $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ en f een functie in $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ zo dat $\|f_n - f\|_1 \to 0$ als $n \to \infty$. Dan heeft (f_n) een deelrij (f_{n_k}) zo dat $f_{n_k} \to f$ b.o. als $k \to \infty$.*

Bewijs Laat (u_n) en u in $L^1 = L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ corresponderen met (f_n) en f. Dan $\|u_n - u\|_1 \to 0$. Dus (u_n) is een fundamentaalrij in L^1. Volgens Lemma 7.4 heeft (u_n) een deelrij (u_{n_k}) zo dat $\sum_{l=1}^{\infty} \|u_{n_{l+1}} - u_{n_l}\|_1 < \infty$. Dus $\int_X |f_{n_1}| \, d\mu + \sum_{l=1}^{\infty} \int_X |f_{n_{l+1}} - f_{n_l}| \, d\mu < \infty$. Volgens Stelling 4.2 is er dan een $g \in \mathcal{L}^1$ zo dat voor $f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{l=1}^{k-1} (f_{n_{l+1}} - f_{n_l})$ geldt dat $f_{n_k} \to g$ b.o. en $\|f_{n_k} - g\|_1 \to 0$ als $k \to \infty$. Maar ook $\|f_{n_k} - f\|_1 \to 0$ als $k \to \infty$. Dus $\|g - f\|_1 = 0$, dus $g = f$ b.o. . Dus $f_{n_k} \to f$ b.o. . □

Opmerking 7.8. Er zijn voorbeelden van maatruimten en een rij $\mathcal{L}^1$-functies (f_n) daarop die t.o.v. $\| \,.\, \|_1$ convergeert naar een functie f, maar niet b.o. convergeert. Zie Opgave 7.2.

7.5 De ruimte $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$

Zij weer $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en definieer

$$\|f\|_2 := \Big(\int_X |f|^2 \, d\mu \Big)^{\frac{1}{2}} \qquad (f \in \mathcal{L}),$$

met de conventie dat $\infty^{\frac{1}{2}} = \infty$. Definieer $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ als de ruimte van alle functies $f \in \mathcal{L}$ met $\|f\|_2 < \infty$. Dan is $\mathcal{L}^2$ een complexe lineaire ruimte (ga na, gebruik o.a. dat $|f + g|^2 \le 2|f|^2 + 2|g|^2$). Definieer op $\mathcal{L}^2$:

$$\langle f, g \rangle := \int_X f \, \overline{g} \, d\mu \qquad (f, g \in \mathcal{L}^2).$$

Merk op dat $\langle f, g \rangle$ een goed gedefinieerd complex getal is voor $f, g \in \mathcal{L}^2$, want $f \, \overline{g}$ is een integreerbare functie op X omdat $|f \, \overline{g}| = |f| \, |g| \le \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$.

De afbeelding $\langle \,.\, , \,.\, \rangle \colon \mathcal{L}^2 \times \mathcal{L}^2 \to \mathbb{C}$ voldoet aan een aantal definiërende eigenschappen van een inproduct (ga na):

$$\begin{aligned}
\langle f, g \rangle &= \overline{\langle g, f \rangle}, \\
\langle \lambda f, g \rangle &= \lambda \, \langle f, g \rangle \qquad (\lambda \in \mathbb{C}), \\
\langle f_1 + f_2, g \rangle &= \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle, \\
\langle f, f \rangle &\ge 0,
\end{aligned}$$

maar er geldt doorgaans niet:

$$\langle f, f \rangle = 0 \implies f = 0,$$

want $\langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0$ b.o. (ga na). Dus de sesquilineaire vorm $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ op $\mathcal{L}^2$ is *positief-semidefiniet*, maar doorgaans niet positief-definiet.

Merk op dat

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} \qquad (f \in \mathcal{L}^2).$$

Dan is $\|\,.\,\|_2$ een seminorm op $\mathcal{L}^2$, maar doorgaans niet een norm. (Er geldt algemeen: als V een complexe lineaire ruimte is met positief semi-definiet inproduct $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$, dan definieert $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ een seminorm op V.)

Net zo als bij $\mathcal{L}^1$ komen we tot een positief-definiet inproduct en een norm door tot de equivalentieklassen van b.o. aan elkaar gelijke functies in $\mathcal{L}^2$ over te gaan. Merk op dat $\|f_1\|_2 = \|f_2\|_2$ als $f_1, f_2 \in \mathcal{L}$ en $f_1 = f_2$ b.o., en dat $\langle f_1, g_1 \rangle = \langle f_2, g_2 \rangle$ als $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{L}^2$ en $f_1 = f_2$ b.o. en $g_1 = g_2$ b.o. . Daarom kunnen we definiëren:

Definitie 7.9. De ruimte $L^2 = L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ bestaat uit alle $u \in L$ zo dat $\|f\|_2 < \infty$ als $f \in \mathcal{L}$ tot de equivalentieklasse u behoort. Op L^2 definiëren we

$$\|u\|_2 := \|f\|_2 \quad \text{en} \quad \langle u, v \rangle := \langle f, g \rangle \qquad (u, v \in L^2)$$

met $f, g \in \mathcal{L}^2$ resp. behorend tot de equivalentieklassen u, v.

Nu volgt er direct:

Propositie 7.10. *L^2 is een complexe lineaire ruimte met inproduct $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ en norm $\|\,.\,\|_2$, en er geldt $\|u\|_2 = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ $(u \in L^2)$.*

Uit de algemene theorie van inproductruimten volgt de belangrijke *Ongelijkheid van Cauchy-Schwarz*. We formuleren hem zowel voor L^2 als voor $\mathcal{L}^2$:

$$|\langle u, v \rangle| \le \|u\|_2 \, \|v\|_2 \qquad (u, v \in L^2),$$
$$|\langle f, g \rangle| \le \|f\|_2 \, \|g\|_2 \qquad (f, g \in \mathcal{L}^2).$$

7.6 De volledigheid van L^2

Een *Hilbert-ruimte* is een volledige inproductruimte, waarbij volledigheid wordt genomen t.o.v. de norm $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Om te laten zien dat L^2 een Hilbert-ruimte is, moeten we dus laten zien dat hij volledig is t.o.v. de norm $\|\,.\,\|_2$.

Stelling 7.11. *L^2 is een Hilbert-ruimte.*

Bewijs Vanwege Propositie 7.5 en de definitie van L^2 is het voor het bewijs van de volledigheid van L^2 voldoende om te laten zien dat er voor elke rij (f_n) in $\mathcal{L}^2$ met $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_2 < \infty$ een $g \in \mathcal{L}^2$ is zo dat $\| \sum_{k=1}^n f_n - g\|_2 \to 0$ als $n \to \infty$. Zij (f_n) dus zo'n rij. We zullen laten zien dat de reeks $\sum_{n=1}^\infty f_n$ b.o. convergeert naar een meetbare functie g en vervolgens dat g de gevraagde functie in $\mathcal{L}^2$ is.

Zij $A_n := \{|f_n| > 2^{-n}\}$. De reeks $\sum_{n=1}^\infty f_n$ convergeert puntsgewijs buiten $A := \bigcup_n A_n$ omdat $|f_n(x)| \le 2^{-n}$ als $x \in A^c$. De verzamelingen A_n hebben eindige maat omdat $\int_X |f_n|^2 \, d\mu \ge 2^{-2n} \mu(A_n)$. We laten nu zien dat voor elke $E \in \mathcal{A}$ met $\mu(E) < \infty$ geldt dat $\sum_{n=1}^\infty f_n$ b.o. convergeert op E. Dan zal dus voor elke m gelden dat $\sum_{n=1}^\infty f_n$ b.o. convergeert op A_m, dus $\sum_{n=1}^\infty f_n$ zal b.o. convergeren op A.

Neem dus $E \in \mathcal{A}$ met $\mu(E) < \infty$. We zullen aantonen dat $\sum_{n=1}^{\infty} 1_E |f_n| < \infty$. Met Propositie 4.1 en de Ongelijkheid van Cauchy-Schwarz zien we dat

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} 1_E |f_n| \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X 1_E |f_n| \, d\mu \le \sum_{n=1}^{\infty} \|1_E\|_2 \, \|f_n\|_2 = \|1_E\|_2 \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_2 < \infty.$$

Dan volgt uit Propositie 3.32 dat $\sum_{n=1}^{\infty} 1_E |f_n| < \infty$ b.o. , dus dat $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ b.o. op E absoluut convergeert.

Kies nu g meetbaar zo dat $g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ buiten een nulverzameling N. We zullen laten zien dat $g \in \mathcal{L}^2$ en dat $\| \sum_{k=1}^{n} f_n - g\|_2 \to 0$ als $n \to \infty$. Schrijf $g_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$. Neem m willekeurig geheel ≥ 1. Dan volgt uit het Lemma van Fatou:

$$\begin{aligned}\int_X |g - g_m|^2 \, d\mu = \int_X |g - g_m|^2 \, 1_{N^c} \, d\mu &= \int_X \lim_{n\to\infty} |g_n - g_m|^2 \, 1_{N^c} \, d\mu \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \int_X |g_n - g_m|^2 \, 1_{N^c} \, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \|g_n - g_m\|_2^2.\end{aligned}$$

Zij $\varepsilon > 0$. Dan is er een m_0 zo dat voor $n > m \ge m_0$ geldt dat

$$\|g_n - g_m\|_2 \le \|f_{m+1}\|_2 + \cdots + \|f_n\|_2 < \varepsilon,$$

dus ook voor $m \ge m_0$:

$$\int_X |g - g_m|^2 \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \|g_n - g_m\|_2^2 \le \varepsilon^2.$$

Dus g is in $\mathcal{L}^2$ omdat g de som is van de $\mathcal{L}^2$-functies $g - g_m$ en g_m. Bovendien $\|g - g_m\|_2 \to 0$ als $m \to \infty$. □

We hebben ook een analogon van Propositie 7.7:

Propositie 7.12. *Laat (f_n) een rij functies zijn in $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ en f een functie in $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ zo dat $\|f_n - f\|_2 \to 0$ als $n \to \infty$. Dan heeft (f_n) een deelrij (f_{n_k}) zo dat $f_{n_k} \to f$ b.o. als $k \to \infty$.*

Bewijs Net zo als in Propositie 7.7 zien we dat er een deelrij (f_{n_k}) is zo dat $\|f_{n_1}\|_2 + \sum_{l=1}^{\infty} \|f_{n_{l+1}} - f_{n_l}\|_2 < \infty$. Dan levert het bewijs van Stelling 7.11 dat $f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{l=1}^{k-1} (f_{n_{l+1}} - f_{n_l}) \to f$ b.o. . □

7.7 De ruimte $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$

Voor $1 \le p < \infty$ kunnen we naar analogie van L^1 en L^2 de ruimte $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ invoeren. Hiertoe definiëren we

$$\|f\|_p := \Big(\int_X |f|^p \, d\mu \Big)^{\frac{1}{p}} \qquad (f \in \mathcal{L}),$$

dan de ruimte $\mathcal{L}^p$ als de verzameling van alle $f \in \mathcal{L}$ waarvoor $\|f\|_p < \infty$, en dan de ruimte L^p als de verzameling van alle $u \in L$ waarvoor $f \in \mathcal{L}^p$ als f in de equivalentieklasse van u zit. Dan kan worden aangetoond dat L^p een lineaire ruimte is met norm $\| \,.\, \|_p$ en dat L^p volledig is t.o.v. deze norm, dus een Banach-ruimte. Zie Rudin [28].

Ook voor $p = \infty$ kan men een ruimte $\mathcal{L}^\infty$ invoeren met seminorm $\| \,.\, \|_\infty$, en vervolgens door op de equivalentieklassen over te gaan een ruimte L^∞ met norm $\| \,.\, \|_\infty$. Voor continue functies f wordt de notatie $\|f\|_\infty$ vaak gebruikt voor de sup-norm. Voor meetbare functies f moeten we iets voorzichtiger zijn. Er kunnen immers onbegrensde nulfuncties zijn!

Laat $f \in \mathcal{L}$. Definieer voor $0 \leq t < \infty$ de meetbare verzameling $E_t := \{|f| > t\} = \{x \in X \mid |f(x)| > t\}$. Dan $E_s \subset E_t$ als $s > t$ en $E_{t_n} \uparrow E_t$ als $t_n \downarrow t$. Dus $\mu(E_s) \leq \mu(E_t)$ als $s > t$ en $\mu(E_s) \uparrow \mu(E_t)$ als $s \downarrow t$. Dus óf $\mu(E_t) > 0$ voor alle t óf er is een M zo dat $\mu(E_t) = 0$ als $t \in [M, \infty)$ en $\mu(E_t) > 0$ als $0 \leq t < M$. In het eerste geval definiëren we $\|f\|_\infty := \infty$, in het tweede geval $\|f\|_\infty := M$. Dus voor $f \in \mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &:= \inf\{t \geq 0 \mid \mu(\{|f| > t\}) = 0\} \\ &= \begin{cases} \min\{t \geq 0 \mid \mu(\{|f| > t\}) = 0\} & \text{als } \exists t\ \mu(\{|f| > t\}) = 0, \\ \infty & \text{als } \forall t\ \mu(\{|f| > t\}) > 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Nu geldt (ga na):

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

We noemen $\|f\|_\infty$ het *essentieel supremum* van f. Omdat $\mu(\{|f| > t\}) = \mu(\{|g| > t\})$ als $f = g$ b.o., hangt $\|f\|_\infty$ alleen van de equivalentieklasse u van f af, dus kunnen we definiëren $\|u\|_\infty := \|f\|_\infty$.

Propositie 7.13. *L^∞ is een lineaire ruimte met norm $\|\,.\,\|_\infty$.*

Bewijs Stel $f, g \in \mathcal{L}^\infty$. Dan laten we zien dat $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Dit is equivalent met $\mu(\{|f + g| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\}) = 0$, en dat op zijn beurt volgt uit de evidente inclusie

$$\{|f + g| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\} \subset \{|f| > \|f\|_\infty\} \cup \{|g| > \|g\|_\infty\}.$$

Nu kan de lezer direct verifiëren dat $\mathcal{L}^\infty$ een lineaire ruimte is met seminorm $\|\,.\,\|_\infty$. Dit geeft aanleiding tot een lineaire ruimte L^∞ met norm $\|\,.\,\|_\infty$ omdat er voor $f \in \mathcal{L}^\infty$ geldt:
$\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$ b.o. . □

Stelling 7.14. *L^∞ is een Banach-ruimte.*

Bewijs Zij (f_n) een "fundamentaalrij" in $\mathcal{L}^\infty$, d.w.z. dat er bij elke $\varepsilon > 0$ een $N(\varepsilon)$ is zo dat $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$ als $m, n \geq N(\varepsilon)$. Het is voldoende om te laten zien dat er een $f \in \mathcal{L}^\infty$ is zo dat $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ als $n \to \infty$. Welnu, er zijn nulverzamelingen $A_{n,m}$ zo dat $|f_n - f_m| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ buiten $A_{n,m}$. Dan is $A := \bigcup_{m,n} A_{m,n}$ een nulverzameling en $|f_n - f_m| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ buiten A. Dus voor elke x buiten A is $(f_n(x))$ een fundamentaalrij in $\mathbb{C}$, die convergeert naar een limiet die we $f(x)$ noemen. Definieer $f(x) := 0$ als $x \in A$. Dan is f meetbaar en $|f_n - f| \leq \varepsilon$ als $n \geq N(\varepsilon)$. Dus $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ als $n \to \infty$. □

7.8 Opgaven

Opgave 7.1. Laat f en g continue functies zijn op $\mathbb{R}^d$. Stel $f = g$ b.o. t.o.v. de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}^d$. Bewijs dat $f = g$.
(Dus iedere equivalentieklasse in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}, \lambda)$ bevat hoogstens één continue functie.)

Opgave 7.2. Geef een voorbeeld van een rij (f_n) in $\mathcal{L}^1([0,1])$ zo dat $\|f_n\|_1 \to 0$ maar niet $f_n \to 0$ b.o. . Geef ook een deelrij (f_{n_k}) van (f_n) die wel b.o. naar 0 convergeert.

Opgave 7.3. Het *convolutieproduct* van twee functies $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ is de functie $f * g$ op $\mathbb{R}^d$ gegeven door

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, g(x-y)\, d\lambda(y) \qquad (x \in \mathbb{R}^d),$$

althans voor die punten x waarvoor $\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\, |g(x-y)|\, d\lambda(y) < \infty$.

a) Laat zien dat $(f * g)(x)$ voor x b.o. goed gedefinieerd is, dat zijn definitie alleen afhangt van de equivalentieklassen van f en g, en dat $f*g$ (na hem bijvoorbeeld 0 gesteld te hebben op een nulverzameling waarbinnen $(f*g)(x)$ niet goed gedefinieerd is) een meetbare functie is.

b) Laat zien dat

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\, \|g\|_1.$$

Opgave 7.4. Zij (f_n) een rij functies in $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ en $f \in \mathcal{L}^1$ zo dat $\|f_n - f\|_1 \to 0$ als $n \to \infty$. Zij (h_n) een rij meetbare complexwaardige functies op $(X, \mathcal{A})$ met $|h_n| \leq 1$ en $h_n \to 0$ bijna overal.

a) Bewijs dat $\|h_n f_n\|_1 \to 0$ als $n \to \infty$.

b) Geef een voorbeeld van zulke rijen (f_n) en (h_n) met $X = [0,1]$, $\mathcal{A}$ de Borel-σ-algebra en μ Lebesgue-maat, zo dat $f = 1$ en $f_n h_n$ niet bijna overal naar 0 convergeert.

Opgave 7.5. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte, $f \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ en $0 < c < \infty$. Bewijs dat

$$c\sqrt{\mu(\{|f| \geq c\})} \leq \|f\|_2.$$

(Dit is een variant van de Ongelijkheid van Markov; zie (3.12).)

Opgave 7.6. Zij (f_n) een rij in $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ en f een meetbare functie zo dat $f_n \to f$ b.o. . Verder is gegeven dat de rij $(\|f_n\|_2)$ begrensd is. Bewijs dat $f \in \mathcal{L}^2$.

Opgave 7.7. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte, (f_n) een rij meetbare functies op X, f een meetbare functie op X en $h \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ zo dat $f_n \to f$ b.o. en $|f_n| \leq h$ voor alle n. Bewijs dat $\|f_n - f\|_2 \to 0$ als $n \to \infty$.

Opgave 7.8. Zij (u_n) een rij in $L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \cap L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, d.w.z. dat voor een representant f_n van u_n geldt dat $\|f_n\|_1 < \infty$ en $\|f_n\|_2 < \infty$. Stel $u_n \to u$ in $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ en $u_n \to v$ in $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Bewijs dat $u = v$.

Opgave 7.9. Bewijs dat de Banach-ruimte $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ niet separabel is, d.w.z. geen aftelbare dichte deelverzameling heeft.

8 De Stelling van Radon-Nikodym en voorwaardelijke verwachting

In dit hoofdstuk gebruiken we de notaties $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$, $L^1(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$, $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ en $L^2(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ voor de verzamelingen van (equivalentieklassen van) de reëelwaardige functies in $\mathcal{L}^1$ respectievelijk $\mathcal{L}^2$. Dit zijn reële lineaire ruimten; $L^1(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ is een reële Banach-ruimte en $L^2(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ is een reële Hilbert-ruimte.

8.1 De Stelling van Radon-Nikodym

Lemma 8.1. *Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte met hierop een σ-eindige maat μ en een eindige maat ρ zo dat $\rho(A) \leq \mu(A)$ voor alle $A \in \mathcal{A}$. Dan is er een $h \in \mathcal{L}^2(\mu) = \mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ zo dat*

$$\rho(A) = \int_A h\, d\mu \quad \textit{voor alle } A \in \mathcal{A} \textit{ met } \mu(A) < \infty \tag{8.1}$$

en $0 \leq h \leq 1$ μ-b.o. ; in het bijzonder kunnen we $h \in \mathcal{L}^2(\mu)$ in (8.1) zo kiezen dat $0 \leq h(x) \leq 1$ voor alle $x \in X$.

Bewijs We kunnen (8.1) herschrijven als

$$\int_X 1_A\, d\rho = \int_X 1_A\, h\, d\mu \quad \text{voor alle } A \in \mathcal{A} \text{ met } \mu(A) < \infty. \tag{8.2}$$

We gaan zoeken naar $h \in \mathcal{L}^2(\mu)$ zo dat nog algemener dan (8.2) geldt:

$$\int_X f\, d\rho = \int_X f\, h\, d\mu \quad \text{voor alle } f \in \mathcal{L}^2(\mu). \tag{8.3}$$

Neem $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$. Dan $f \in \mathcal{L}^2(\rho)$ omdat $\rho \leq \mu$, en $1_X \in \mathcal{L}^2(\rho)$ omdat $\rho(X) < \infty$. De Ongelijkheid van Cauchy-Schwarz geldt ook voor vectoren in lineaire ruimten met semi-positief-definiet inproduct zoals $\mathcal{L}^2(\rho)$ (met hetzelfde bewijs als voor echte inproductruimten). Daarom:

$$\int_X |f|\, d\rho \leq \Big(\int_X |1_X|^2\, d\rho\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_X |f|^2\, d\rho\Big)^{\frac{1}{2}} \leq (\rho(X))^{\frac{1}{2}} \Big(\int_X |f|^2\, d\mu\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Dus $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ is ρ-integreerbaar. Laat $\|\,.\,\|_2$ de $\mathcal{L}^2(\mu)$-seminorm (of $L^2(\mu)$-norm) aanduiden. Dan:

$$\Big|\int_X f\, d\rho\Big| \leq (\rho(X))^{\frac{1}{2}}\, \|f\|_2 \qquad (f \in \mathcal{L}^2(\mu)). \tag{8.4}$$

Als we f op een verzameling N van μ-maat 0 veranderen, dan zal $\int_X f\, d\rho$ niet veranderen omdat $\rho(N) \leq \mu(N)$ waardoor $\rho(N) = 0$. Dus links en rechts in (8.4) mogen we $f \in \mathcal{L}^2(\mu)$ vervangen door zijn equivalentieklasse $u \in L^2(\mu)$. We zien ook dat $\phi\colon u \mapsto \int_X u\, d\rho\colon L^2(\mu) \to \mathbb{R}$ een lineaire afbeelding is die wegens (8.4) voldoet aan

$$|\phi(u)| \leq (\rho(X))^{\frac{1}{2}}\, \|u\|_2 \qquad (u \in L^2(\mu)).$$

Dus ϕ is een begrensde lineaire functionaal op $L^2(\mu)$. Uit Stelling 7.11 weten we dat $L^2(\mu)$ een reële Hilbert-ruimte is. Dus wegens de Stelling van Riesz-Fréchet is er een (unieke) $w \in L^2(\mu)$ zo dat

$$\phi(u) = \langle u, w \rangle \qquad (u \in L^2(\mu)). \tag{8.5}$$

Zij $h \in \mathcal{L}^2(\mu)$ een representant van w. Dan kunnen we (8.5) herschrijven als (8.3). Als $A \in \mathcal{A}$ met $\mu(A) < \infty$ dan $1_A \in \mathcal{L}^2(\mu)$, dus dan geldt (8.3) voor $f := 1_A$. Daarmee is (8.2), dus (8.1) bewezen.

Om te bewijzen dat $h \geq 0$ μ-b.o. nemen we $X = \bigcup_n X_n$ met $X_n \in \mathcal{A}$ en $\mu(X_n) < \infty$ (dit is mogelijk omdat μ σ-eindig is). Dan $\{h < 0\} = \bigcup_n \big(\{h < 0\} \cap X_n\big)$. Dan volgt $h \geq 0$ μ-b.o. als we kunnen bewijzen dat voor elke n geldt dat $\{h < 0\} \cap X_n$ μ-maat 0 heeft. Neem daarom $A := \{h < 0\} \cap X_n$ in (8.1). Dan $\int_A h\, d\mu \leq 0$ omdat $h < 0$ op A, maar $\rho(A) \geq 0$, dus er volgt uit (8.1) dat $\int_A h\, d\mu = 0$, dus $\int_A (-h)\, d\mu = 0$, dus $-h = 0$ μ-b.o. op A wegens Propositie 3.28. Maar $-h > 0$ op A, dus $\mu(A) = 0$.

We bewijzen dat $h \leq 1$ μ-b.o. op een soortgelijke manier. Dus we zullen bewijzen dat $\mu(A) = 0$ als $A := \{h > 1\} \cap X_n$. Voor deze A geeft (8.1) dat

$$\mu(A) \geq \rho(A) = \int_A h\, d\mu \geq \int_A d\mu = \mu(A).$$

Dus $\int_A h\, d\mu = \int_A 1\, d\mu$, dus $\int_A (h-1)\, d\mu = 0$. Uit Propositie 3.28 volgt er dat $h - 1 = 0$ μ-b.o. op A. Maar $h - 1 > 0$ op A, dus $\mu(A) = 0$. □

Stelling 8.2 (Radon-Nikodym)**.** *Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte met hierop σ-eindige maten μ en ρ. Dan zijn er een $N \in \mathcal{A}$ met $\mu(N) = 0$ en een meetbare functie $h\colon X \to [0, \infty)$ zo dat*

$$\rho(A) = \int_A h\, d\mu + \rho(A \cap N) \qquad (A \in \mathcal{A}). \tag{8.6}$$

Als er ook een $N' \in \mathcal{A}$ is met $\mu(N') = 0$ en een meetbare functie $h'\colon X \to [0, \infty)$ zo dat

$$\rho(A) = \int_A h'\, d\mu + \rho(A \cap N') \qquad (A \in \mathcal{A}),$$

dan $\rho(N \backslash N') = 0 = \rho(N' \backslash N)$ en $h = h'$ μ-b.o. .

Bewijs We nemen eerst aan dat ρ een eindige maat is. Omdat $\rho \leq \mu + \rho$ is er vanwege Lemma 8.1 een meetbare functie $g\colon X \to [0, 1]$ zo dat voor alle $A \in \mathcal{A}$ met $\mu(A) < \infty$ geldt

$$\rho(A) = \int_A g\, d(\mu + \rho), \quad \text{dus} \quad \int_A 1\, d\rho = \int_A g\, d\mu + \int_A g\, d\rho,$$

dus

$$\int_A (1 - g)\, d\rho = \int_A g\, d\mu. \tag{8.7}$$

Schrijf $X = \bigcup_n X_n$ (disjunct) met $X_n \in \mathcal{A}$ en $\mu(X_n) < \infty$. Als $A \in \mathcal{A}$ dan geldt (8.7) met A vervangen door $A \cap X_n$, dus

$$\int_A (1-g)\, d\rho = \sum_n \int_{A \cap X_n} (1-g)\, d\rho = \sum_n \int_{A \cap X_n} g\, d\mu = \int_A g\, d\mu,$$

dus (8.7) geldt voor alle $A \in \mathcal{A}$.

Voor $A := \{g = 1\}$ geeft (8.7) dat $\mu(\{g = 1\}) = 0$. Dus $N := \{g = 1\}$ heeft μ-maat 0. Bekijk nu (8.7) met $A \in \mathcal{A}$ en $A \subset N^c$. Op N^c is $1 - g > 0$ en meetbaar, dus $(1 - g)^{-1}$ bestaat op N^c en is daar positief en meetbaar. Vanwege Stelling 2.32 geldt op N^c dat $(1 - g)^{-1} = \sum_n c_n 1_{A_n}$

met $c_n > 0$ en $A_n \in \mathcal{A}$ en $A_n \subset N^c$. Dus voor $A \in \mathcal{A}$ met $A \subset N^c$ kunnen we met behulp van Propositie 4.1 en (8.7) schrijven:

$$\int_A 1\,d\rho = \int_A (1-g)^{-1}(1-g)\,d\rho = \sum_n c_n \int_A 1_{A_n}(1-g)\,d\rho = \sum_n c_n \int_{A\cap A_n} (1-g)\,d\rho$$
$$= \sum_n c_n \int_{A\cap A_n} g\,d\mu = \sum_n c_n \int_A 1_{A_n} g\,d\mu = \int_A \frac{g}{1-g}\,d\mu.$$

Dus als $A \in \mathcal{A}$ en $A \subset N^c$ dan

$$\rho(A) = \int_A \frac{g}{1-g}\,d\mu.$$

Voor algemene $A \in \mathcal{A}$ kunnen we schrijven $A = (A \cap N^c) \cup (A \cap N)$. Dan

$$\rho(A) = \rho(A\cap N^c) + \rho(A \cap N) = \int_{A\cap N^c} \frac{g}{1-g}\,d\mu + \rho(A\cap N) = \int_A h\,d\mu + \rho(A\cap N)$$

met

$$h(x) := \begin{cases} \frac{g(x)}{1-g(x)} & \text{als } x \in N^c, \\ 0 & \text{als } x \in N. \end{cases}$$

Met de gemaakte keuzen van N en h geldt dus (8.6).

Nu bekijken we het algemene geval dat ρ een σ-eindige maat is. Dan kunnen we schrijven $X = \bigcup_n X_n$ (disjunct) met $X_n \in \mathcal{A}$ en $\rho(X_n) < \infty$. Dan kunnen we voor elke n een $N_n \subset X_n$ in $\mathcal{A}$ vinden met $\mu(N_n) = 0$ en een meetbare functie $h_n\colon X \to [0,\infty)$ met $h_n = 0$ buiten X_n zo dat

$$\rho(A) = \int_A h_n\,d\mu + \rho(A \cap N_n) \qquad (A \in \mathcal{A},\ A \subset X_n).$$

Dan geldt voor algemene $A \in \mathcal{A}$ (8.6) met $N := \bigcup_n N_n$ en $h := \sum_n h_n$.

Stel nu dat er ook een N' en h' zijn zoals in de formulering van de stelling. Dan zien we uit (8.6) voor $A := N' \backslash N$ dat $\rho(N'\backslash N) = 0$, en evenzo uit de volgende vergelijking voor $A := N\backslash N'$ dat $\rho(N\backslash N') = 0$. Er volgt dat op N^c $d\rho = h\,d\mu$ en $d\rho = h'\,d\mu$, dus $h = h'$ μ-b.o. op N^c vanwege Stelling 5.6. Omdat $\mu(N) = 0$, zal dan ook $h = h'$ μ-b.o. op X. □

Gevolg 8.3. *Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte met hierop σ-eindige maten μ en ρ. Stel dat $\rho \ll \mu$ (ρ is absoluut continu t.o.v. μ; zie Definitie 5.2). Dan is er een meetbare functie $h\colon [0,\infty)$ zo dat $d\rho = h\,d\mu$, d.w.z.*

$$\rho(A) = \int_A h\,d\mu \qquad (A \in \mathcal{A}). \tag{8.8}$$

Bewijs Neem h en N zo dat (8.6) geldt. Omdat $\mu(N) = 0$, zal $\mu(A \cap N) = 0$ voor elke $A \in \mathcal{A}$. Omdat $\rho \ll \mu$ zal dan $\rho(A \cap N) = 0$ voor elke $A \in \mathcal{A}$. Dus (8.6) gaat over in (8.8). □

In Stelling 5.6 zagen we al dat h in Gevolg 8.3 uniek bepaald is door μ en ρ, op verandering na van h op een verzameling van μ-maat 0.

Definieer onder de aannamen van Stelling 8.2 en in termen van de daar gevonden N en h de maten ρ_a en ρ_s op $(X, \mathcal{A})$:

$$\rho_a(A) := \int_A h\,d\mu, \quad \rho_s(A) := \rho(A \cap N) \qquad (A \in \mathcal{A}). \tag{8.9}$$

We zagen al in Propositie 5.1 dat ρ_a een maat is. Ook zien we direct in dat ρ_s een maat is (ga na). Merk op dat

$$\mu(N) = 0, \quad \rho_s(N_c) = 0.$$

Algemener definiëren we:

Definitie 8.4. Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte met hierop maten μ en ν. We zeggen dat μ *singulier* is t.o.v. ν als er een $A \in \mathcal{A}$ is zo dat $\mu(A) = 0$ en $\nu(A^c) = 0$.
Notatie $\mu \perp \nu$.

Als μ en ν singulier t.o.v. elkaar zijn zoals in Definitie 8.4, dan leven die twee maten als het ware op disjuncte deelverzamelingen van X: de maat μ "leeft" op A^c en de maat ν "leeft" op A. Daarentegen, als ν absoluut continu is t.o.v. μ dan "leeft" ν op een deelverzameling van de verzameling waar μ op leeft.
Besef wel dat we niet echt kunnen spreken over *de* verzameling waar een maat op leeft. Bijvoorbeeld bij de Lebesgue-maat λ op $\mathbb{R}$ is er geen kleinste meetbare verzameling A zo dat $\lambda(A^c) = 0$. Want zo'n A kan niet leeg zijn, dus we kunnen altijd nog naar een kleinere meetbare verzameling gaan met dezelfde eigenschap door een punt uit A weg te laten.

Gevolg 8.5 (herformulering van Radon-Nikodym)**.** *Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte met hierop σ-eindige maten μ en ρ. Dan zijn er unieke maten ρ_a en ρ_s op $(X, \mathcal{A})$ met $\rho_a \ll \mu$ en $\rho_s \perp \mu$ zo dat*

$$\rho = \rho_a + \rho_s, \tag{8.10}$$

zijn er een $N \in \mathcal{A}$ met $\mu(N) = 0$ en een meetbare functie $h\colon X \to [0, \infty)$ zo dat

$$d\rho_a = h\, d\mu \quad \text{en} \quad \rho_s(A) = \rho(A \cap N) \qquad (A \in \mathcal{A})$$

en hebben N en h uniciteitseigenschappen zoals geformuleerd in Stelling 8.2.

Bewijs De existentie van ρ_A en ρ_S volgt uit het voorgaande.
Stel nu dat (8.10) geldt voor zekere maten $\rho_a \ll \mu$ en $\rho_s \perp \mu$. We zullen dan laten zien dat er N en h zijn zo dat ρ_a en ρ_s gegeven zijn door (8.9). Inderdaad, omdat $\rho_s \perp \mu$ is er een $N \in \mathcal{A}$ zo dat $\mu(N) = 0$ en $\rho_s(N^c) = 0$. Dus voor $A \in \mathcal{A}$ geldt dat $\rho_s(A) = \rho_s(A \cap N)$ en $\rho_a(A \cap N) = 0$ (ga na). Dus

$$\rho(A \cap N) = \rho_a(A \cap N) + \rho_s(A \cap N) = \rho_s(A).$$

We vinden uit Gevolg 8.3 de gewenste functie h zo dat $d\rho_a = h\, d\mu$.

Nu volgt er uit Stelling 8.2 dat de daar geformuleerde uniciteitseigenschappen voor de hier verkregen h en N gelden. Dat leidt weer tot de uniciteit van $\rho_a \ll \mu$ en $\rho_s \perp \mu$ zo dat (8.10) geldt. $\square$

De ontbinding (8.10) van een maat ρ als een som van een (t.o.v. μ) absoluut continue maat en een (t.o.v. μ) singuliere maat heet de *Radon-Nikodym-ontbinding* (of *-decompositie*) van ρ.

8.2 Voorwaardelijke verwachting

Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en zij $\mathcal{B}$ een σ-algebra op X (niet per se Borel) die bevat is in $\mathcal{A}$. Als ρ een maat is op $(X, \mathcal{A})$ dan definieert de beperking van ρ tot $\mathcal{B}$ uiteraard een maat op

$(X, \mathcal{B})$; noem deze maat $\widetilde{\rho}$. Als ρ absoluut continu is t.o.v. μ dan is $\widetilde{\rho}$ absoluut continu t.o.v. $\widetilde{\mu}$ (ga na).

Neem nu aan dat $\widetilde{\mu}$ σ-eindig is. Dan is μ ook σ-eindig (ga na). Neem aan dat $d\rho = h\, d\mu$ met $h\colon X \to [0, \infty)$ en $h \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dus ρ is een eindige maat op $(X, \mathcal{A})$ die absoluut continu is t.o.v. de maat μ. Dan is $\widetilde{\rho}$ een eindige maat op $(X, \mathcal{B})$ die absoluut continu is t.o.v. $\widetilde{\mu}$. Vanwege Gevolg 8.3 is er dan een $\mathcal{B}$-meetbare functie $\widetilde{h}\colon X \to [0, \infty)$ zo dat $d\widetilde{\rho} = \widetilde{h}\, d\widetilde{\mu}$, d.w.z.

$$\widetilde{\rho}(B) = \int_B \widetilde{h}\, d\widetilde{\mu} \qquad (B \in \mathcal{B}).$$

Maar $\widetilde{\rho}(B) = \rho(B) = \int_B h\, d\mu$. Dus

$$\int_B h\, d\mu = \int_B \widetilde{h}\, d\widetilde{\mu} \qquad (B \in \mathcal{B}). \tag{8.11}$$

In het bijzonder geldt (8.11) voor $B := X$. Dus $\widetilde{h} \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \widetilde{\mu})$.

Merk op dat h, meetbaar t.o.v. $\mathcal{A}$, niet per se meetbaar hoeft te zijn t.o.v. $\mathcal{B}$. We kunnen daarom ook niet werken met de integraal $\int_B h\, d\widetilde{\mu}$. Maar $\widetilde{h}$, meetbaar t.o.v. $\mathcal{B}$, is ook meetbaar t.o.v. $\mathcal{A}$. We kunnen dus ook werken met de integraal $\int_B \widetilde{h}\, d\mu$, en het is zelfs zo dat $\int_B \widetilde{h}\, d\mu = \int_B \widetilde{h}\, d\widetilde{\mu}$ als $B \in \mathcal{B}$ (ga na).

Laat nu $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$. Dan $f = f_+ - f_-$ met f_+ en f_- niet-negatief en in $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dus er volgt uit (8.11) dat

$$\int_B f\, d\mu = \int_B \widetilde{f}\, d\widetilde{\mu} \qquad (B \in \mathcal{B}). \tag{8.12}$$

met $\widetilde{f} = \widetilde{h_+} - \widetilde{h_-}$, dus $\widetilde{f} \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \widetilde{\mu}; \mathbb{R})$. Zo komen we tot de volgende stelling:

Stelling 8.6. *Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en zij $\mathcal{B}$ een σ-algebra op X die bevat is in $\mathcal{A}$. Zij $\widetilde{\mu}$ de beperking van μ tot $\mathcal{B}$ en neem aan dat de maat $\widetilde{\mu}$ σ-eindig is. Dan is er bij elke functie $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ een functie $\widetilde{f} \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \widetilde{\mu}; \mathbb{R})$ zo dat* (8.12) *geldt. Als* (8.12) *ook geldt met $\widetilde{f}$ vervangen door $\widetilde{f}'$ dan $\widetilde{f} = \widetilde{f}'$ $\widetilde{\mu}$-b.o. . Als $f \geq 0$ dan $\widetilde{f} \geq 0$ $\widetilde{\mu}$-b.o. .*

Bewijs De existentie van $\widetilde{f}$ hebben we hierboven al bewezen. Laat nu $\widetilde{f}' \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \widetilde{\mu}; \mathbb{R})$ zo dat $\int_B f\, d\mu = \int_B \widetilde{f}'\, d\widetilde{\mu}$ voor alle $B \in \mathcal{B}$. Dan $\int_B (\widetilde{f} - \widetilde{f}')\, d\widetilde{\mu} = 0$ voor alle $B \in \mathcal{B}$, in het bijzonder voor $B := \{\widetilde{f} - \widetilde{f}' > 0\}$ en voor $B := \{\widetilde{f} - \widetilde{f}' < 0\}$. Dus deze twee verzamelingen hebben $\widetilde{\mu}$-maat 0. Voor $f \geq 0$ hadden we al een $\widetilde{f} \geq 0$ geconstrueerd. $\square$

Merk op dat de afbeelding $f \mapsto \widetilde{f}$ aanleiding geeft tot een corresponderende afbeelding $u \mapsto \widetilde{u}\colon L^1(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}) \to L^1(X, \mathcal{B}, \widetilde{\mu}; \mathbb{R})$ die bovendien lineair is.

Definitie 8.7. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een kansruimte (dus $\mu(X) = 1$). Een functie $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ heet een *stochast* op $(X, \mathcal{A}, \mu)$ en

$$\mathcal{E} f := \int_X f\, d\mu$$

heet de *verwachting* van f. Zij $\mathcal{B}$ een σ-algebra op X die bevat is in $\mathcal{A}$. Dan schrijven we

$$\mathcal{E}(f \mid \mathcal{B}) := \widetilde{f}$$

met $\widetilde{f} \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \widetilde{\mu}; \mathbb{R})$ gekarakteriseerd door (8.12). We noemen $\mathcal{E}(f \mid \mathcal{B})$ de *voorwaardelijke verwachting* van f op $\mathcal{B}$.

Voorbeeld 8.8. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een kansruimte. Laat $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ (disjunct) met $B_i \in \mathcal{A}$ en $\mu(B_i) > 0$. Laat $\mathcal{B}$ de σ-algebra zijn die bestaat uit alle verenigingen van verzamelingen B_i. Dan is een functie g op X meetbaar t.o.v. $\mathcal{B}$ dan en slechts dan als g constant is op elke verzameling B_i.

Zij f een stochast op $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dan is $\mathcal{E}(f \mid \mathcal{B})$ meetbaar t.o.v. $\mathcal{B}$, dus er zijn constanten $c_i \in \mathbb{R}$ zo dat

$$\mathcal{E}(f \mid \mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{n} c_i 1_{B_i}.$$

Voor elke i geldt dat

$$\int_{B_i} f \, d\mu = \int_{B_i} \mathcal{E}(f \mid \mathcal{B}) \, d\widetilde{\mu} = \int_{B_i} c_i 1_{B_i} \, d\widetilde{\mu} = c_i \mu(B_i).$$

Dus $c_i = (\mu(B_i))^{-1} \int_{B_i} f \, d\mu$. Dus

$$\mathcal{E}(f \mid \mathcal{B})(x) = \frac{1}{\mu(B_i)} \int_{B_i} f \, d\mu \qquad (x \in B_i). \tag{8.13}$$

We kunnen het rechterlid van (8.13) interpreteren als $\int_X f \, d\mu_i$, waarbij μ_i de *voorwaardelijke kansmaat* op $(X, \mathcal{A})$ is gedefinieerd door

$$\mu_i(A) := \frac{\mu(A \cap B_i)}{\mu(B_i)} \qquad (A \in \mathcal{A}).$$

Dit verklaart de benaming *voorwaardelijke verwachting* van $\mathcal{E}(f \mid \mu)$: voor $x \in B_i$ is $\mathcal{E}(f \mid \mu)(x)$ de verwachting van f t.o.v. de voorwaardelijke kansmaat μ_i.

Voorbeeld 8.9. Laat $(X, \mathcal{A}, \mu)$ en $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ kansruimten zijn. Dan is $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$ een kansruimte. We gaan de voorwaardelijke verwachting bekijken op de σ-algebra $\mathcal{A} \times Y = \{A \times Y \mid A \in \mathcal{A}\}$. Dan volgt uit Stelling 6.34 dat $(\widetilde{\mu \times \nu})(A \times Y) = \mu(A)$. Laat f een stochast zijn op $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \times \nu)$. Dan wordt de voorwaardelijke verwachting van f gegeven door

$$\mathcal{E}(f \mid \mathcal{A} \times Y)(x, y) = \int_Y f(x, \eta) \, d\nu(\eta) \qquad \text{voor } y \in Y \text{ en voor } x \in X \ \mu\text{-b.o.} . \tag{8.14}$$

Inderdaad, we gebruiken Stelling 6.9 (Fubini 2). Een onderdeel van die stelling zegt dat

$$\widetilde{f}(x) := \int_Y f(x, \eta) \, d\nu(\eta)$$

voor x μ-b.o. gedefinieerd is en dat $\widetilde{f} \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$. Om (8.14) te bewijzen moeten we nog nagaan dat

$$\int_{A \times Y} \widetilde{f}(x) \, d(\widetilde{\mu \times \nu})(x, y) = \int_{A \times Y} f \, d(\mu \times \nu) \qquad (A \in \mathcal{A}).$$

Dit volgt ook uit Stelling 6.9, want

$$\begin{aligned}
\int_{A \times Y} \widetilde{f}(x) \, d(\widetilde{\mu \times \nu})(x, y) &= \int_A \widetilde{f}(x) \, d\mu(x) \\
&= \int_A \Big(\int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \Big) \, d\mu(x) = \int_{A \times Y} f(x, y) \, d(\mu \times \nu)(x, y).
\end{aligned}$$

Merk op dat (8.14) enigszins analoog is aan (8.13), maar niet volledig. Een echte imitatie van (8.13) zou voor het rechterlid van (8.14) geven:

$$\frac{1}{(\mu \times \nu)(\{x\} \times Y)} \int_{\{x\}\times Y} f \, d(\mu \times \nu),$$

maar dit is alleen goed gedefinieerd als $\mu(\{x\}) > 0$, want $(\mu \times \nu)(\{x\} \times Y) = \mu(\{x\})\nu(Y) = \mu(\{x\})$.

Opmerking 8.10. Veronderstel met de aannamen van Definitie 8.7 dat $f \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$. Dan volgt er met Cauchy-Schwarz dat $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$, dus f zit ook in $\mathcal{L}^1$. Als $g \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{B}, \widetilde{\mu}; \mathbb{R})$ dan ook $g \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ en $\|g\|_2$ t.o.v. $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{B}, \widetilde{\mu}; \mathbb{R})$ is gelijk aan $\|g\|_2$ t.o.v. $\mathcal{L}^2(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ (ga na), dus we kunnen de genormeerde lineaire ruimte $L^2(X, \mathcal{B}, \widetilde{\mu}; \mathbb{R})$ opvatten als lineaire deelruimte van de reële Hilbert-ruimte $L^2(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$. Omdat $L^2(X, \mathcal{B}, \widetilde{\mu}; \mathbb{R})$ zelf een reële Hilbert-ruimte is, zal hij dan een gesloten lineaire deelruimte van $L^2(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})$ zijn.

Zij $P\colon L^2(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R}) \to L^2(X, \mathcal{B}, \widetilde{\mu}; \mathbb{R})$ de orthogonale projectie op de gesloten lineaire deelruimte $L^2(X, \mathcal{B}, \widetilde{\mu}; \mathbb{R})$. Dan

$$\mathcal{E}(f \mid \mathcal{B}) = Pf \qquad (f \in L^2(X, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{R})). \tag{8.15}$$

Om dit te bewijzen, moeten we inzien dat

$$\int_B Pf \, d\mu = \int_B f \, d\mu \qquad (B \in \mathcal{B}),$$

of equivalent:

$$\int_X (f - Pf) 1_B \, d\mu = 0 \qquad (B \in \mathcal{B}). \tag{8.16}$$

Maar $1_B \in L^2(X, \mathcal{B}, \widetilde{\mu}; \mathbb{R})$. Omdat P een orthogonale projectie is, zal 1_B loodrecht staan op $f - Pf$, dus $\langle f - Pf, 1_B \rangle = 0$, dus inderdaad (8.16).

8.3 Opgaven

Opgave 8.1. Beschouw het interval $[-1, 1]$ met Lebesgue-maat λ. Zij ρ een maat op $([-1, 1], \mathcal{B})$ (met $\mathcal{B}$ de Borel-σ-algebra) zo dat

$$\rho([-1, x]) = \begin{cases} 0 & \text{als } -1 \leq x < 0, \\ 1 + x^3 & \text{als } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Laat zien dat ρ niet absoluut continu is t.o.v. λ en geef de Radon-Nikodym-ontbinding van ρ t.o.v. λ.

Opgave 8.2. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een kansruimte en zij $\mathcal{B}$ een σ-algebra bevat in $\mathcal{A}$. Zij f een reëelwaardige integreerbare functie op $(X, \mathcal{A}, \mu)$ en g een begrensde reëelwaardige meetbare functie op $(X, \mathcal{B})$. Bewijs dat

$$\mathcal{E}(gf \mid \mathcal{B}) = g \, \mathcal{E}(f \mid \mathcal{B}).$$

Hints, schetsmatige uitwerkingen en antwoorden van de opgaven

2.4 $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{E}) \implies \sigma(\mathcal{C}) \subset \sigma(\mathcal{E})$.

2.5 $\sigma(\mathcal{C})$ bevat de gesloten halfruimten $\{x_i \leq c\}$, de open halfruimten $\{x_i > c\}$, de plakken $\{a < x_i < b\}$ en dus de open blokken $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d)$. Iedere open verzameling is aftelbare vereniging van dergelijke open blokken.

2.8 $\{f \leq c\} = \{f > c\}^c$, $\{f \leq c\} = \bigcap_n \{f < c + 1/n\}$ en $\{f < c\} = \bigcup_n \{f \leq c - 1/n\}$.

2.11 c) Bijvoorbeeld te schrijven als:

$$x = 1_{\{1\}}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{j-1}} 1_{[(k-1)2^{-j+1}+2^{-j}, k2^{-j+1})}(x).$$

2.12 Zij ξ_n het n-de cijfer in de decimale ontwikkeling van het getal x (waarbij we 9-repetent uitsluiten ten gunste van 0-repetent). De verzamelingen $\{\xi_1 = c_1, \ldots, \xi_n = c_n\}$ zijn meetbaar voor elke keuze van de cijfers $c_1, \ldots, c_n$ in $\{0 \ldots, 9\}$, dus ook de verzameling "geen zevens na de 12de decimaal" is meetbaar.

2.13 De verzameling $\{f < c\}$ is een halfrechte $(-\infty, a)$ of $(-\infty, a]$ of leeg of de hele rechte.

2.14 $\{f < g\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{f < q < g\}$ of
$\{f < g\} = \big(\{f < \infty\} \cap \{g = \infty\}\big) \bigcup \big(\{f = -\infty\} \cap \{g > -\infty\}\big) \bigcup \{f 1_{f > -\infty} - g 1_{g < \infty} < 0\}$.
$\{f = g\}^c = \{f < g\} \cup \{g < f\}$.

2.16 Zij $A = \{\liminf_{n\to\infty} f_n > -\infty\}$, $B = \{\limsup_{n\to\infty} f_n < \infty\}$, $C = \{\liminf_{n\to\infty} f_n < \limsup f_n\}$. Zij E de verzameling van alle punten waar $\lim_{n\to\infty} f_n$ bestaat en eindig is. Te bewijzen dat E meetbaar is. Er geldt $E = (A \cap B) \backslash C$.

2.17 Dit is een doorsnede van een rij open verzamelingen O_n waarbij O_n bestaat uit alle punten $a \in X$ met de eigenschap dat er een geheel getal $k \in \mathbb{Z}$ is en een open omgeving U van a waarop $(k-1)/n < f(x) < (k+1)/n$ voor $x \in U$. De verzameling O_n is inderdaad open, want als a een dergelijke omgeving U heeft en $b \in U$ dan heeft b ook zo'n omgeving, en wel U.

Algemener kan het gestelde in Opgave 2.17 bewezen worden voor een afbeelding f van een topologische ruimte X naar een separabele metrische ruimte Y. Zij $\{x_k\}_{k=1,2,\ldots}$ een aftelbare dichte deelverzameling van Y. Nu krijg je de continuïteitspunten van f door de doorsnede van open verzamelingen O_n te nemen met O_n bestaande uit alle $a \in X$ die een open omgeving U hebben met de eigenschap dat er een k is zo dat voor alle $x \in U$ geldt dat $d(f(x), y_k) < n^{-1}$.

De verzameling van continuïteitspunten van f hoeft niet open te zijn. Construeer bijvoorbeeld een stijgende functie f van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ die als sprongpunten de rationale getallen heeft. Dan zijn de continuïteitspunten van f de irrationale getallen.

2.18 De inclusie-afbeelding $j \colon X_0 \to X$ die x afbeeldt op x is continu. Dit geeft de ene richting. Laat voor de andere richting o.a. zien dat de collectie $\mathcal{B}_1$ van alle verzamelingen $B \cap X_0$ met $B \subset X$ Borel-verzameling, een σ-algebra is.

2.19 a) Verzamelingen B_c zitten in $\mathcal{A}$ omdat f meetbaar is. Laat $\tilde{\mathcal{B}}$ bestaan uit alle elementen B van $\mathcal{A}$ met de eigenschap dat als $x \in B$ en $f(y) = f(x)$ dan $y \in B$. Dan is $\tilde{\mathcal{B}}$ een σ-algebra die $\mathcal{B}$ omvat.

b) Stel $g(x) \neq g(y)$ dan is er een $\mathcal{B}$-meetbare B met $x \in B$, $y \in B^c$, dus $f(x) \neq f(y)$. Dus als $f(x) = f(y)$ dan $g(x) = g(y)$. Dus G kan zo gekozen worden dat $G(f(x)) = g(x)$ voor alle $x \in X$.

3.1 Pas de σ-additiviteit toe waarbij $A_1 = A$ eindige maat heeft en $A_2 = A_3 = \ldots = \emptyset$.

3.2 Bewijs eerst dat de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}^d$ (mod $\mathbb{Z}^d$) translatie-invariant is door te laten zien dat de Borel-verzamelingen $E \subset \mathbb{R}^d$ (mod $\mathbb{Z}^d$) met $\lambda(E + a) = \lambda(E)$ (mod $\mathbb{Z}^d$) voor alle $a \in \mathbb{R}^d$ een σ-algebra vormen die de blokken $(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]$ (mod $\mathbb{Z}^d$) bevat. Dit levert al de translatie-invariantie van de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}^d$ voor begrensde Borel-verzamelingen in $\mathbb{R}^d$.

3.3 Schrijf $\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ met $\varepsilon_n > 0$. Schrijf $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, q_2, \ldots\}$. Vind achtereenvolgens disjuncte open deelverzamelingen $E_1, E_2, \ldots$ van $[0,1]$ zo dat E_n een eindige vereniging is van open intervallen, $\lambda(E_n) = \varepsilon_n$, en q_n ligt in de afsluiting van $\bigcup_{k=1}^{n} E_k$.

3.4 Re: Propositie 3.6 d):
Zij $B_n = A_n \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1})$. Dan $B_n \subset A_n$. De verzamelingen B_n zijn meetbaar en disjunct met vereniging $\bigcup_n B_n$. Dus $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \mu\left(\bigcup_n B_n\right) = \sum_n \mu(B_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$.

3.5 Zij $E_n := A_1 \backslash A_n$. Dan is (E_n) een stijgende rij en $\bigcup_n E_n = A_1 \backslash \bigcap_n A_n$.

3.6 f) Vervang $\bigcup_n A_n$ door $\bigcup_n B_n$ met (B_n) stijgend, zoals in het bewijs van Propositie 3.6. De aftelbare vereniging $\bigcup_n F_n$ is niet gesloten. Benader met een eindige vereniging.

g) De reguliere verzamelingen vormen een σ-algebra die de blokken bevat.

3.7 Splits $\mathbb{R}^d$ in bolschillen $E_n = \{n \leq \|x\| < n+1\}$. Op deze schillen is λ regulier. Gebruik ook dat de vereniging van een rij gesloten verzamelingen $F_n \subset E_n$ gesloten is.

3.13 Overdek eerst de diagonaal van het eenheidsvierkant door n vierkantjes met zijdelengte $1/n$.

3.16 Stel $A := \{f = \infty\}$ heeft positieve maat. Zij $t_n = n 1_A$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Dan $\int_X f \, d\mu \geq \int_X t_n \, d\mu$ voor elke n.

3.17 Stel $f_n \to f_0$ buiten de nulverzameling N. Definieer $\widetilde{f_n} := f_n 1_{N^c}$ voor $n = 0, 1, 2, \ldots$. Pas het Lemma van Fatou toe op de functies $\widetilde{f_n}$.

3.19 Gebruik $f = f^+ - f^-$ en $|f| = f^+ + f^-$.

3.20 Laat $\xi_n \to \xi$ in $\mathbb{R}^d$. Pas nu Lebesgue toe met majorant $h \equiv 1$. Dit geeft $\phi(\xi_n) \to \phi(\xi)$.

3.21 Continuïteit van g in y is equivalent met $g(y_n) \to g(y)$ als $y_n \to y$. Bewijs dit laatste met behulp van de Stelling van Lebesgue, waarbij je moet gebruiken dat de rand van een bal Lebesgue-maat 0 heeft. (De inhoud van een bal met straal $r > 0$ is $4\pi r^3/3$.) De bewering over het nul worden van g in ∞ is equivalent met $g(y_n) \to 0$ als $y_n \to \infty$. Bewijs ook dat met behulp van de Stelling van Lebesgue.

3.22 Pas Fatou toe op $h + h_n - |f - f_n|$. Puntsgewijze convergentie naar $2h$ geeft $\int_X 2h \, d\mu \leq \int_X h \, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X h_n \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \, d\mu = 2 \int_X h \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| \, d\mu$.

3.23 Ga in b) als volgt te werk. Definieer eerst $\lambda(A)$ als $A \in \mathcal{A}$ en $\nu(A) < \infty$. Bewijs de σ-additiviteit van λ voorzover alle betreffende verzamelingen eindige ν-maat hebben. Definieer vervolgens $\lambda(A)$ als $A \in \mathcal{A}$ en A is aftelbare vereniging van meetbare verzamelingen van eindige

ν-maat. Laat zien dat dan de definitie van $\lambda(A)$ onafhankelijk is van de manier waarop A als aftelbare disjuncte vereniging van verzamelingen van eindige ν-maat wordt geschreven. Bewijs ook de σ-additiviteit van λ voorzover alle betreffende verzamelingen van zulk type zijn. Definieer tenslotte $\lambda(A) := \infty$ als $A \in \mathcal{A}$ maar A niet te schrijven is als aftelbare vereniging van meetbare verzamelingen van eindige ν-maat. Bewijs nu de σ-additiviteit van λ algemeen.
In c) kan een voorbeeld van niet-uniciteit gegeven worden voor $\mathcal{A} := \{\emptyset, X\}$.

3.24 Merk op dat $\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k \subset E_n \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$. Pas Propositie 3.7 en Opgave 3.5 toe.

3.25 Laat zien dat er een stijgende rij meetbare verzamelingen B_n is met $\mu(B_n) \uparrow c$. Als $c = \infty$ vind dan een tegenspraak door twee disjuncte meetbare verzamelingen van oneindige maat te construeren.

4.1 $A = \{\sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} = \infty\}$.

4.2 Bewijs eerst dat H continu is op $[-c, c]$. Op dit interval zijn $|p|$ en $|q|$ continu en dus begrensd, zeg door M. Op de rechthoek $R = [-c, c] \times [-M, M]$ is $|h|$ begrensd, zeg door N. Stel de rij punten $x_n \in [-c, c]$ convergeert naar een punt x. Pas nu de Stelling van Lebesgue toe op

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-M}^{M} 1_{[p(x_n), q(x_n)]}(y)\, h(x_n, y)\, dy.$$

4.3 Inductie. Zij $\varepsilon > 0$. De p-de afgeleide $\frac{\partial^p}{\partial x^p} y^k e^{-xy}$ is op $\varepsilon \le x < \infty$, $0 \le y < \infty$ begrensd.

4.4 Differentiatiestelling.

4.7 $\lambda_e(E) + \lambda_e([a, b] \backslash E) = b - a$ precies als $\inf\limits_{\substack{U \supset E \\ U \text{ open}}} \lambda(U) = \sup\limits_{\substack{V \subset E \\ V \text{ compact}}} \lambda(V)$. Hiermee construeer je Borel-meetbare verzamelingen E_1 en E_2 zo dat $E_1 \subset E \subset E_2$ en $\lambda(E_1) = \lambda(E_2)$.

4.10 $|\sin t^2|$ heeft oneindige integraal. De verzameling $|\sin t^2| \ge \frac{1}{2}$ heeft oneindige Lebesgue-maat. Deze verzameling is opgebouwd uit intervalletjes $J_n = \{t^2 \in [n\pi + \pi/6, n\pi + 5\pi/6]\}$ met lengte $\sqrt{n\pi + \frac{5}{6}\pi} - \sqrt{n\pi + \frac{1}{6}\pi} > \frac{1}{3}\pi^{\frac{1}{2}}(n+1)^{-\frac{1}{2}}$.

4.11 $\int_{[0,\infty)} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} f 1_{[0,n]}\, d\lambda$.

5.5 Beeld $\frac{1}{n}$ af op $\frac{1}{n+1}$.

6.2 Gezien Stelling 6.16 mogen we veronderstellen dat f continu is met compacte drager. Benader f dan eerst in sup-norm met simpele functies van de vorm als gegeven in de opgave.

6.4 Substitueer $\displaystyle \frac{1}{x}\left(\frac{1 - e^{-x}}{x} - e^{-x}\right) = \int_{[0,1]} y\, e^{-xy}\, d\lambda(y)$.

6.5 Substitueer

$$\frac{1}{x} = \int_0^{\infty} e^{-xy}\, dy \qquad (x > 0)$$

in de integrand en gebruik dat $\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix})$.

6.6 Bij c): Substitueer $|f(x)| = \int_{(0,\infty)} 1_{(0, f(x))}\, d\lambda(t)$ en gebruik dat

$$1_{(0,f(x))}(t) = 1_{\{|f|>t\}}(x) = 1_E(x, t).$$

7.2 Neem $f_n := 1_{E_n}$ met (E_n) een rij intervallen zo dat $\lambda(E_n) \to 0$ als $n \to \infty$ en iedere $x \in [0,1]$ voor oneindig veel waarden van n in E_n ligt.

7.3 Gebruik voor a) onderdelen van de Stelling van Fubini 2 toegepast op
$h(x,y) := f(y)\,g(x-y)$.
Gebruik voor b) de Stelling van Fubini 1 toegepast op $h(x,y) := |f(y)|\,|g(x-y)|$.

7.6 Gebruik het Lemma van Fatou.

7.8 Gebruik Proposities 7.7 en 7.12.

7.9 Definieer L^∞-functies ϕ_t $(t \in \mathbb{R})$ op $\mathbb{R}$ door $\phi_t(x) := e^{itx}$. Laat zien dat $\|\phi_s - \phi_t\|_\infty = 2$ als $s \neq t$.

Toelichting bij de referenties

De referenties bevatten, naast een paar gespecialiseerde artikelen, een grote hoeveelheid boeken over maat- en integratietheorie, Een standaardreferentie hierbij is nog steeds Rudin [28, Ch. 1, 2, 3, 6, 7]. Van de meer recente boeken kan Knapp [16, Ch. V, VI, VII] worden aanbevolen. Een Nederlandstalig boek is Van Harn & Holewijn [12].

Referenties

[1] W. Arveson, *An invitation to C^*-algebra*, Springer-Verlag, 1976.

[2] R. B. Ash, *Measure, integration, and functional analysis*, Academic Press, 1972.

[3] P. Billingsley, *Probability and measure*, Wiley, 1979; third ed. 1995.

[4] A. Browder, *Mathematical analysis. An introduction*, Springer-Verlag, 1996.

[5] J. Choksi, *A history of the convergence theorems of (Lebesgue) integration*, Abstract of lecture at CMS Winter Meeting, Canada, 1999, `http://www.cms.math.ca/Events/winter99/abstracts/node89.html`.

[6] J. R. Choksi, *Vitali's convergence theorem on term by term integration*, Enseign. Math. (2) 47 (2001), 269–285.

[7] R. M. Dudley, Real analysis and probability, Cambridge University Press, 2002 (revised reprint of 1989 original).

[8] J. Fabius & W. R. van Zwet, *Grondbegrippen van de waarschijnlijkheidsrekening*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 3e gewijzigde druk, 1980.

[9] B. R. Gelbaum & J. H. M. Olmsted, *Counterexamples in analysis*, Dover Publications, corrected reprint of the second (1965) edition, 2003.

[10] C. George, *Exercises in integration*, Springer-Verlag, 1984.

[11] P. Halmos, *Measure theory*, Van Nostrand, 1950.

[12] K. van Harn & P. J. Holewijn, *Maat- en integratietheorie*, Epsilon Uitgaven 58, 2005.

[13] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914; translated as *Set theory*, Chelsea Publishing Company, New York, 1957.

[14] T. Hawkins, *Lebesgue's theory of integration. Its origins and development*, AMS Chelsea Publishing, reprint of the 1979 corrected second edition, 2001.

[15] J. F. C. Kingman & S. J. Taylor, *Introduction to measure and probability*, Cambridge University Press, 1966.

[16] A. W. Knapp, *Basic real analysis*, Birkhäuser, 2005.

[17] J. Korevaar, *Mathematical Methods. Vol. 1: Linear algebra, normed spaces, distributions, integration*, Academic Press, 1968.

[18] K. Kuratowski, *Sur une généralisation de la notion d'homéomorphie*, Fund. Math. 22 (1934), 206–220

[19] H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, 1904; 2. ed. 1950.

[20] S. Mazurkiewicz, *Über die Menge der differenzierbaren Funktionen*, Fundam. Math. 27 (1936), 244–249; Zbl 0015.20503.

[21] J. C. Oxtoby, *Measure and category*, Springer-Verlag, second ed., 1980.

[22] K. R. Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces*, AMS Chelsea Publishing, reprint of the 1967 original, 2005.

[23] F. Riesz & B. Sz. Nagy, *Leçons d'analyse fonctionelle*, Gauthier-Villars, fourth edition extending 1952 original, 1965.

[24] R. M. Robinson, *On the decomposition of spheres*, Fund. Math. 34 (1947), 247–260.

[25] C. A. Rogers and J. E. Jayne, *K-analytic sets*, Part 1 in *Analytic sets*, Academic Press, 1980.

[26] P. Roman, *Some modern mathematics for physicists and other outsiders. An introduction to algebra, topology, and functional analysis. Vol. 1: Algebra, topology, and measure theory*, Pergamon, 1975

[27] A. C. M. van Rooij & W. H. Schikhof, *A second course on real functions*, Cambridge University Press, 1982.

[28] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, second ed. 1974, third ed. 1987.

[29] S. Saks, *Theory of the integral*, second revised edition, with two additional notes by S. Banach, Dover, 1964.

[30] Y. G. Sinai, *Probability theory*, Springer-Verlag, 1992.

[31] R. M. Solovay, *A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Ann. of Math. (2) 92 (1970), 1–56.

[32] S. M. Srivastava, *A course on Borel sets*, Springer-Verlag, 1998.

[33] *The Scottish book*, R. D. Mauldin (ed.), Birkhäuser, 1981.

[34] S. Ulam, *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, Fund. Math. 16 (1930), 140–150

[35] S. Wagon, *The Banach-Tarski paradox*, Cambridge University Press, 1985.

[36] A. J. Weir, *Integration and measure, Vols. 1 and 2*, Cambridge University Press, 1973, 1974.

[37] A. C. Zaanen, *Integration*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1967.

[38] A. C. Zaanen, *Continuity, integration and Fourier theory*, Springer-Verlag, 1989.