

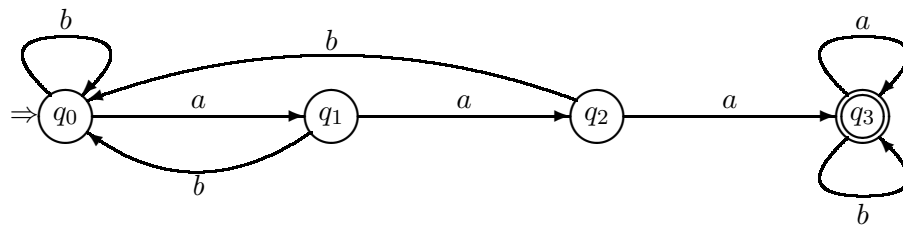
2 Eindige automaten

In dit hoofdstuk introduceren we de hoofdrolspelers van het college: eindige automaten.

2.1 Deterministische eindige automaten

We beginnen met een voorbeeld.

Voorbeeld 2.1 Beschouw het volgende plaatje van de eindige automaat $\mathbb{A}_1$.



Deze automaat bestaat uit de *toestanden* q_0 , q_1 , q_2 en q_3 , waarvan q_0 de *starttoestand* is, en q_3 de enige *accepterende* toestand; de verzameling van alle toestanden noteren we als $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$. Het *invoeralfabet* van $\mathbb{A}_1$ is de verzameling $\Sigma = \{a, b\}$.

De mogelijke *stappen* of *transities* van $\mathbb{A}_1$ worden weergegeven door de pijlen in het diagram. Merk op dat er vanuit elke toestand voor elk symbool een unieke pijl vertrekt; we kunnen dus de transities van $\mathbb{A}_1$ weergeven als een *transitiefunctie* $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$.

Alle bovenstaande informatie over $\mathbb{A}_1$ kunnen we ook weergeven in een tabel:

$\mathbb{A}_1$	a	b
$\Rightarrow q_0$	q_1	q_0
q_1	q_2	q_0
q_2	q_3	q_0
$q_3 \Downarrow$	q_3	q_3

De automaat komt tot leven als we *invoer* toedienen in de vorm van een woord uit het invoeralfabet. De automaat *verwerkt* dit woord als volgt: te beginnen vanuit de initiële toestand q_0 loopt $\mathbb{A}_1$ stap voor stap door het woord, bij elk symbool van toestand verspringend zoals de transitie-functie dat voorschrijft. Dit proces, dat we de *run* van de automaat op het woord noemen, is afgerond als het laatste symbool voorbij is gekomen; de automaat bevindt zich dan in de *eindtoestand* van de run.

Voorbeelden:

- Op inputwoord $w_1 = abaaba$ voltrekt zich het volgende proces: $q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{b} q_0 \xrightarrow{a} q_1$;
- De run van $\mathbb{A}_1$ op inputwoord $w_2 = abaaaba$ is als volgt: $q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{a} q_3 \xrightarrow{b} q_3 \xrightarrow{a} q_3$.

We zeggen dat $\mathbb{A}_1$ het woord w_2 *herkent* of *accepteert* omdat de eintoestand q_3 van de run op w_2 acceptierend is; het woord w_1 wordt niet herkend, oftewel *geweigerd*, omdat de run van de automaat op dit woord eindigt in de toestand q_1 die niet acceptierend is.

Deze automaat accepteert precies de woorden w over het alfabet $\{a, b\}$ die drie opeenvolgende a 's bevatten.

De automaat $\mathbb{A}_1$ van Voorbeeld 2.1 is een voorbeeld van een *deterministische eindige automaat*. De algemene definitie is als volgt.

Definitie 2.2 Een *deterministische eindige automaat* of DEA is een quintupel $\mathbb{A} = (Q, q_I, \Sigma, \delta, F)$ zó dat

- Q is een eindige, niet-lege verzameling van objecten die we *toestanden* noemen,
- $q_I \in Q$ is de *begintoestand*,
- Σ is het *invoeralfabet*,
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ is de *transitiefunctie*
- $F \subseteq Q$ is de verzameling *accepterende toestanden*.

Definitie 2.3 Gegeven is een deterministische eindige automaat $\mathbb{A} = (Q, q_I, \Sigma, \delta, F)$. In plaats van $\delta(q) = q'$ noteren we vaak $q \xrightarrow{a} q'$.

We schrijven $q \xrightarrow{w} q'$ als $w = a_1 a_2 \dots a_n$ en er transities zijn van de vorm $q \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \dots \xrightarrow{a_n} q_n = q'$. Bijzondere gevallen van deze definitie: voor het lege woord geldt $q \xrightarrow{\epsilon} q$, en $q \xrightarrow{\epsilon} q'$ geldt voor geen enkele $q' \neq q$; als w uit één symbool bestaat, zeg $w = a$, dan geldt $q \xrightarrow{w} q'$ precies als $q \xrightarrow{a} q'$.

Voor elke toestand q en elk woord w is er precies één toestand q' zodanig dat $q \xrightarrow{w} q'$; deze toestand q' noteren we wel als $\hat{\delta}(q, w)$.

Voorbeeld 2.4 Voor de automaat $\mathbb{A}_1$ van Voorbeeld 2.1 geldt $q_0 \xrightarrow{bbab} q_0$, $q_2 \xrightarrow{baaa} q_3$ en $q_3 \xrightarrow{\epsilon} q_3$.

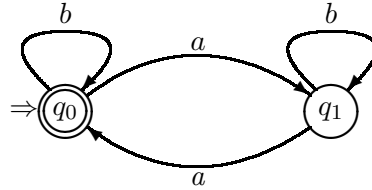
Merk op dat we de functie $\hat{\delta}$ ook inductief hadden kunnen definiëren:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(q, \epsilon) &= q \\ \hat{\delta}(q, xa) &= \delta(\hat{\delta}(q, x), a). \end{aligned} \tag{3}$$

Definitie 2.5 Gegeven is een deterministische eindige automaat $\mathbb{A} = (Q, q_I, \Sigma, \delta, F)$. De *run* van $\mathbb{A}$ op een Σ -woord $w = a_1 a_2 \dots a_n$ wordt gedefinieerd als de rij $q_I \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \dots \xrightarrow{a_n} q_n$. De *eindtoestand* van deze run is de toestand $q_n = \hat{\delta}(q_I, w)$; een run is *succesvol* als de eindtoestand acceptierend is, dat wil zeggen: element van F is.

De automaat $\mathbb{A}$ *accepteert* of *herkent* een woord $w \in \Sigma^*$ als $\hat{\delta}(q_I, w) \in F$, dat wil zeggen als de run van $\mathbb{A}$ op w succesvol is. De taal $L(\mathbb{A})$ wordt gedefinieerd als de verzameling woorden die door $\mathbb{A}$ worden geaccepteerd. Anders geformuleerd: $L(\mathbb{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_I, w) \in F\}$.

Voorbeeld 2.6 Beschouw de taal L over $\{a, b\}$ bestaande uit die woorden waar een even aantal a 's in voorkomt. Deze taal wordt herkend door de volgende automaat $\mathbb{A}_2$:



Dit kunt u aantonen door bijvoorbeeld te laten zien dat voor alle woorden $w \in \{a, b\}^*$ het volgende geldt:

$$\hat{\delta}(q_0, w) = \begin{cases} q_0 & \text{als } \#_a(w) \text{ is even,} \\ q_1 & \text{als } \#_a(w) \text{ is oneven.} \end{cases} \quad (4)$$

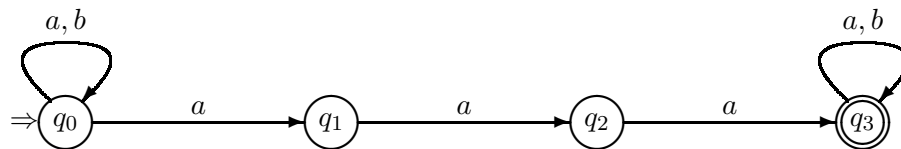
2.2 Niet-deterministische eindige automaten

Niet-deterministische automaten lijken op deterministische. Het verschil is dat bij een niet-deterministische automaat, gegeven een toestand q en een invoersymbool a , de volgende toestand niet uniek bepaald hoeft te zijn, of zelfs maar hoeft te bestaan.

Definitie 2.7 Een *niet-deterministische eindige automaat* of NEA is een quintupel $\mathbb{A} = (Q, q_I, \Sigma, \Delta, F)$ zó dat

- Q is een eindige, niet-lege verzameling *toestanden*,
- $q_I \in Q$ is de *begintoestand*,
- Σ is het *invoeralfabet*,
- $\Delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ is de *transitiefunctie*
- $F \subseteq Q$ is de verzameling *eindtoestanden*.

Voorbeeld 2.8 Beschouw de volgende automaat $\mathbb{A}_3$:



In een tabel kunnen we deze automaat als volgt weergeven:

$\mathbb{A}_3$	a	b
$\Rightarrow q_0$	q_0, q_1	q_0
q_1	q_2	—
q_2	q_3	—
$q_3 \Downarrow$	q_3	q_3

Nondeterminisme van een automaat komt dus naar voren in de transitie-functie, die een paar $(q, a) \in Q \times \Sigma$ afbeeldt op een *verzameling* $\Delta(q, a) \subseteq Q$ van *mogelijke* nieuwe toestanden, in plaats van op een unieke nieuwe toestand $\delta(q, a)$. Een niet-deterministische automaat kan meerdere runs hebben op één en hetzelfde invoerwoord, en een run kan ook *vastlopen*. Dit laatste gebeurt, als de automaat zich in een bepaalde toestand, zeg q , bevindt, en op een symbool, zeg $a \in \Sigma$, stuit waarvoor geldt dat $\Delta(q, a) = \emptyset$.

Definitie 2.9 Gegeven is een niet-deterministische eindige automaat $\mathbb{A} = (Q, q_I, \Sigma, \delta, F)$. We noteren $q \xrightarrow{a} q'$ als $q' \in \Delta(q, a)$, dat wil zeggen, als q' een mogelijke nieuwe toestand is na q' bij invoersymbool a . We schrijven $q \xrightarrow{w} q'$ als $w = a_1 a_2 \dots a_n$ en er transities zijn van de vorm $q \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \dots \xrightarrow{a_n} q_n = q'$. Bijzondere gevallen van deze definitie werken precies als in het deterministische geval.

Een *run* van $\mathbb{A}$ op het Σ -woord $w = a_1 a_2 \dots a_n$ is een rij $q_I \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \dots \xrightarrow{a_k} q_k$ waarvoor geldt dat (i) $k = n$ of (ii) $k < n$ en $\Delta(q_k, a_{k+1}) = \emptyset$. In het eerste geval zeggen we dat de run *succesvol* is wanneer $q_k \in F$; in het tweede geval zeggen we dat de run *vastloopt in q_k op a_{k+1}* .

Voorbeeld 2.10 Beschouw de volgende runs van de automaat $\mathbb{A}_3$ (van Voorbeeld 2.8) op het woord $w = abaaab$:

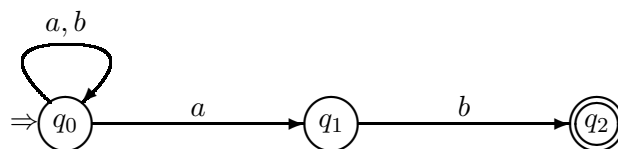
- $q_0 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{b} q_0 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{b} q_0$;
- $q_0 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{b} q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{a} q_3 \xrightarrow{b} q_3$;
- $q_0 \xrightarrow{a} q_1 \not\xrightarrow{b}$

Van deze drie runs is de tweede de enige die succesvol is; de derde loopt vast in q_1 op b .

Nu runs niet meer uniek zijn, moeten we een *keuze* maken wanneer we een woord accepteren.

Definitie 2.11 Een niet-deterministische eindige automaat $\mathbb{A}$ *accepteert* een woord w als $\mathbb{A}$ minimaal één succesvolle run op w heeft. De taal $L(\mathbb{A})$ wordt gedefinieerd als de verzameling woorden die door $\mathbb{A}$ worden herkend.

Voorbeeld 2.12 Beschouw de volgende automaat $\mathbb{A}_4$:



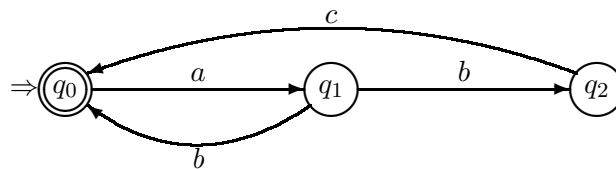
We claimen dat

$$L(\mathbb{A}_4) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ eindigt op } ab\}. \quad (5)$$

Voor het bewijs van (5) behandelen we de twee inclusies afzonderlijk.

- ⊆: Stel eerst dat $w \in L(\mathbb{A}_4)$. Er is dus een succesvolle run van $\mathbb{A}_4$ op w . Op grond van het diagram van de automaat kan dat alleen maar betekenen dat de laatste stappen van deze run er als volgt uit zien: $\cdots q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_2$. Maar dat betekent dat w inderdaad eindigt op de string ab .
- ⊇: Omgekeerd, als w eindigt op ab , dan kunnen we w dus schrijven als $w = uab$ voor zeker woord $u \in \{a, b\}^*$. Bekijk nu die run van $\mathbb{A}_4$ op w waarin de automaat net zo lang in de begintoestand q_0 blijft ‘wachten’ totdat het hele woord u voorbij is, dan met de a overgaat naar q_1 , en vervolgens met de b naar q_2 . Deze run, die je kunt weergeven als $q_0 \xrightarrow{u} q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_2$, is duidelijk succesvol; per definitie wordt w dus door $\mathbb{A}_4$ geaccepteerd.

Voorbeeld 2.13 Voor een tweede voorbeeld, beschouw de volgende automaat $\mathbb{A}_5$:



We laten zien dat

$$L(\mathbb{A}_5) = L((ab + abc)^*). \quad (6)$$

- ⊆: Stel dat $\mathbb{A}_5$ het woord w accepteert. We moeten aantonen dat w matcht met de expressie $(ab + abc)^*$.
- Bekijk daarvoor een succesvolle run van $\mathbb{A}_5$ op w . Op grond van het diagram van $\mathbb{A}_5$ kunnen we onmiddellijk concluderen dat deze run óf lengte nul heeft, óf uit een aantal (één of meer) deelruns bestaat die elk van de vorm $q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_0$ danwel $q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{c} q_0$ zijn. Hieruit volgt dat w óf leeg is ($w = \epsilon$), of van de vorm $w = u_1 \cdots u_n$ (met $n \geq 1$) waarbij elke u_i één van de woorden ab of abc is, en dus in ieder geval matcht met de expressie $ab + abc$. Maar dan is het duidelijk dat inderdaad $w \triangleright (ab + abc)^*$.
- ⊇: Stel omgekeerd dat $w \in L((ab + abc)^*)$. Dan is w óf het lege woord, óf w is van de vorm $w = u_1 \cdots u_n$ (met $n \geq 1$) waarbij elke u_i matcht met de expressie $ab + abc$. In het eerste geval wordt $w = \epsilon$ geaccepteerd door $\mathbb{A}_5$ op grond van de run $q_0 \xrightarrow{\epsilon} q_0$. In het tweede geval geldt voor iedere u_i dat $q_0 \xrightarrow{u_i} q_0$. Combineren we deze ‘deelruns’ dan hebben we een succesvolle run $q_0 \xrightarrow{u_1} q_0 \xrightarrow{u_2} \cdots \xrightarrow{u_n} q_0$. Met andere woorden w wordt inderdaad door $\mathbb{A}_5$ geaccepteerd.

2.3 Determinizeren

Definitie 2.14 Twee automaten $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$ (deterministisch danwel niet-deterministisch) heten *equivalent* als $L(\mathbb{A}) = L(\mathbb{B})$, dat wil zeggen: als ze precies dezelfde woorden herkennen.

Voorbeeld 2.15 De automaten $\mathbb{A}_1$ uit Voorbeeld 2.1 en $\mathbb{A}_3$ uit Voorbeeld 2.8 herkennen allebei precies die woorden over het alfabet $\{a, b\}$ die drie opéénvolgende a 's bevatten (ga dit na voor $\mathbb{A}_3$), en zijn dus equivalent.

Het is niet zo moeilijk om in te zien dat je elke deterministische automaat een niet-deterministisch equivalent $\mathbb{A}'$ kunt geven: vervang de transitiefunctie $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ door $\Delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ gegeven door $\Delta(q, a) := \{\delta(q, a)\}$. Op het eerste gezicht hoeft het omgekeerde niet te gelden. Het is bijvoorbeeld niet op voorhand duidelijk of je een deterministische automaat kunt maken die equivalent is met de automaat $\mathbb{A}_4$ van Voorbeeld 2.12. Toch is dit mogelijk.

Voorbeeld 2.16 De eindige automaat $\mathbb{A}_4$ uit Voorbeeld 2.12 kan worden beschreven door de volgende tabel:

$\mathbb{A}_4$	a	b
$\Rightarrow q_0$	q_0, q_1	q_0
q_1	—	q_2
$q_2 \Downarrow$	—	—

We construeren nu een nieuwe automaat $\mathbb{A}_4^d$. De toestanden van $\mathbb{A}_4^d$ worden gevormd door *alle acht verzamelingen* van toestanden van $\mathbb{A}_4$: $\emptyset, \{q_0\}, \{q_1\}, \dots, \{q_0, q_1, q_2\}$.

De transities worden als volgt bepaald: bekijk steeds alle toestanden die je op grond van het symbool (zeg, a) kunt bereiken uit één van de toestanden uit de huidige verzameling (zeg, S); de verzameling van al deze toestanden tesamen vormt de $\delta(S, a)$.

Bijvoorbeeld: uit q_0 kun je met b in q_0 terechtkomen, en uit q_1 kun je met b in q_2 terechtkomen; dus geldt $\delta(\{q_0, q_1\}, b) = \{q_0, q_2\}$.

De begintoestand van $\mathbb{A}_4^d$ is het singleton $\{q_0\}$; een deelverzameling $S \subseteq Q$ is een eindtoestand van $\mathbb{A}_4^d$ als S een eindtoestand van $\mathbb{A}_4$ bevat; dat wil zeggen, als $q_2 \in S$.

$\mathbb{A}_4^d$	a	b
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\Rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$\{q_2\} \Downarrow$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\} \Downarrow$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1, q_2\} \Downarrow$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$\{q_0, q_1, q_2\} \Downarrow$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Merk op dat voor elk woord w geldt dat $\hat{\delta}(\{q_0\}, w)$ precies de verzameling van toestanden $s \in Q$ is waarvoor geldt dat $q_0 \xrightarrow{w} s$. Bijvoorbeeld: $\hat{\delta}(\{q_0\}, abaa) = \{q_0, q_1\}$, en q_0 en q_1 zijn precies de twee toestanden s van $\mathbb{A}_4$ waarvoor geldt $q \xrightarrow{abba} s$.

Het is niet al te moeilijk om te laten zien dat $L(\mathbb{A}_4^d) = L(\mathbb{A}_4)$.

Sterker nog, de *subset constructie* van het bovenstaande voorbeeld kan worden uitgevoerd voor *elke* niet-deterministische automaat.

Definitie 2.17 Gegeven is een NEA $\mathbb{A} = (Q, q_I, \Sigma, \Delta, F)$. De *deterministische simulator* van $\mathbb{A}$ is de automaat $\mathbb{A}^d = (Q', q'_I, \Sigma', \delta, F')$ gegeven door:

$$\begin{aligned} Q' &= \mathcal{P}(Q) \\ q'_I &= \{q_I\} \\ \Sigma' &= \Sigma \\ \delta(S, a) &= \{q \in Q \mid s \xrightarrow{a} q \text{ voor zekere } s \in S\} \\ F' &= \{S \subset Q \mid S \cap F \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Stelling 2.18 Voor elke niet-deterministische eindige automaat $\mathbb{A}$ geldt dat $L(\mathbb{A}) = L(\mathbb{A}^d)$.

Bewijs. De cruciale observatie in het bewijs is dat voor alle woorden $w \in \Sigma^*$ geldt:

$$\hat{\delta}(\{q_I\}, w) = \{q \in Q \mid q_I \xrightarrow{w}_{\mathbb{A}} q\}. \quad (7)$$

Hieruit volgt vrijwel onmiddellijk dat $L(\mathbb{A}) = L(\mathbb{A}^d)$:

$$\begin{aligned} L(\mathbb{A}^d) &= \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(\{q_I\}, w) \in F'\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(\{q_I\}, w) \cap F \neq \emptyset\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid \text{er is een } s \in \hat{\delta}(\{q_I\}, w) \cap F\} \\ &= \{w \in \Sigma^* \mid \text{er is een } s \in F \text{ zodanig dat } q_I \xrightarrow{w}_{\mathbb{A}} s\} \\ &= L(\mathbb{A}). \end{aligned}$$

Het bewijs van (7) gaat met inductie naar de lengte van w .

basisstap Neem aan dat $|w| = 0$, dat wil zeggen: $w = \epsilon$.

Links in (7) staat er dan $\hat{\delta}(\{q_I\}, \epsilon)$, en dat is wegens (3) gelijk aan $\{q_I\}$.

Rechts in (7) staat er dan $\{q \in Q \mid q_I \xrightarrow{\epsilon}_{\mathbb{A}} q\} = \{q_I\}$.

Deze twee verzamelingen zijn dus inderdaad aan elkaar gelijk.

inductiestap Neem aan dat $|w| = k + 1$. We mogen dus aannemen dat w van de vorm xa is, waarbij de inductiehypothese van toepassing is op x . Dat wil zeggen: we mogen gebruik maken van de inductiehypothese

$$\hat{\delta}(\{q_I\}, x) = \{q \in Q \mid q_I \xrightarrow{x}_{\mathbb{A}} q\}.$$

We geven deze verzameling weer als P .

Nu kijken we naar w . Wegens (3) geldt dat $\hat{\delta}(\{q_I\}, xa) = \delta(\hat{\delta}(\{q_I\}, x), a) = \delta(P, a)$.

Links in (7) staat er nu

$$\hat{\delta}(\{q_I\}, xa) = \delta(P, a) = \{q \in Q \mid \text{er is een } p \in P \text{ zodanig dat } p \xrightarrow{a} q\}$$

Rechts in (7) staat er

$$\{q \in Q \mid q_I \xrightarrow{xa}_{\mathbb{A}} q\} = \{q \in Q \mid \text{er is een } p \text{ zodanig dat } q_I \xrightarrow{x}_{\mathbb{A}} p \xrightarrow{a} q\}$$

Deze twee verzamelingen zijn dus inderdaad aan elkaar gelijk.

QED

Merk op dat de deterministische simulator $\mathbb{A}^d$ van een nondeterministische eindige automaat $\mathbb{A}$ *exponentieel* veel toestanden heeft, uitgedrukt in het aantal toestanden van $\mathbb{A}$. Immers, een verzameling van n elementen heeft 2^n deelverzamelingen. In veel gevallen zijn niet al deze toestanden nodig, en kan een NEA worden gesimuleerd door een DEA die niet al te veel groter is dan de NEA.

Voorbeeld 2.19 In de automaat $\mathbb{A}_4^d$ van Voorbeeld 2.16 kunnen de *onbereikbare* toestanden $\emptyset$, $\{q_1\}$, $\{q_2\}$, $\{q_1, q_2\}$ en $\{q_1, q_2, q_3\}$ probleemloos verwijderd worden zonder dat dit invloed heeft op de herkende kracht van de automaat. Wat overblijft is de volgende automaat, die evenveel toestanden heeft als de oorspronkelijke.

	a	b
$\Rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\} \Downarrow$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$

In het algemeen is een exponentiële toename van het aantal toestanden echter onvermijdelijk.

Opgaven

Opgave 2.1 Geef deterministische automaten die precies de volgende talen herkennen — het alfabet is steeds $\{0, 1\}$.

- (a) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{zowel } \#_0(w) \text{ als } \#_1(w) \text{ is even}\}$,
- (b) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ eindigt op } 0\}$,
- (c) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ eindigt op } 00\}$,
- (d) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{elk blok van vijf opéénvolgende symbolen in } w \text{ bevat minstens één } 0\}$
- (e) $\{w \in \{0, 1\}^* \mid w \neq 010 \text{ en } w \neq 101\}$.

Opgave 2.2 Gegeven is een DEA $\mathbb{A}$. Geef een DEA $\mathbb{B}$ die het complement van $L(\mathbb{A})$ herkent; dat wil zeggen: $\mathbb{B}$ accepteert precies de woorden die niet door $\mathbb{A}$ worden herkend.

Opgave 2.3 Welke talen over $\{a, b\}$ worden door de volgende automaten herkend?

(a)

$\mathbb{A}_1$	a	b
$\Rightarrow q_0$	q_1	q_0
$q_1 \Downarrow$	q_2	q_1
q_2	q_2	q_1

(b)

$\mathbb{A}_2$	a	b
$\Rightarrow q_\epsilon$	q_a	q_ϵ
q_a	q_{aa}	q_ϵ
q_{aa}	q_{aa}	q_{aab}
$q_{aab} \Downarrow$	q_{aab}	q_{aab}

(c)

$\mathbb{A}_3$	a	b
$\Rightarrow q_0$	q_1	q_3
q_1	q_3	q_2
$q_2 \Downarrow$	q_2	q_2
q_3	q_3	q_3

Opgave 2.4 In een zekere imperatieve programmeertaal $\mathbf{P}$ kunnen (en moeten) reële getallen op een van de volgende manieren worden gerepresenteerd:

1. een niet-lege cijferreeks (bijvoorbeeld: 24356);

2. twee niet-lege cijferreeksen gescheiden door een punt (bijvoorbeeld: 3.1416);
3. een niet-lege cijferreeks, gevolgd door het symbool E, mogelijk gevolgd door een minteken (-), en zeker gevolgd door een niet-lege cijferreeks (bijvoorbeeld: 15E-4, 16E238);
4. een combinatie van 2 en 3, dat wil zeggen: twee niet-lege cijferreeksen gescheiden door een punt (bijvoorbeeld: 3.1416), gevolgd door het symbool E, mogelijk gevolgd door een minteken (-), en zeker gevolgd door een niet-lege cijferreeks (bijvoorbeeld: 16.2E-23).

Geef een eindige automaat die precies deze expressies herkent.

Opgave 2.5 Geef eindige automaten die de volgende talen herkennen:

- (a) $L((a+b)^*b(a+bb)^*)$
- (b) $L(ab^*aa + bba^*ab)$
- (c) $L(abab^* + aba^*)$. Kan een automaat met ≤ 5 toestanden het werk doen?
- (d) $L((ab + abc)^*)$. Kan een automaat met ≤ 3 toestanden het werk doen?

Opgave 2.6 Geef deterministische equivalenten van de volgende niet-deterministische automaten:

(a)

$\mathbb{A}_1$	a	b
$\Rightarrow q_0$	q_0, q_1	q_1
$q_1 \Downarrow$	q_2	q_2
q_2	—	q_2

(b)

$\mathbb{A}_2$	a	b
$\Rightarrow q_0$	q_0, q_1	q_0
q_1	q_2	q_2
q_2	q_3	—
$q_3 \Downarrow$	q_3	q_3

(c)

$\mathbb{A}_3$	a	b
$\Rightarrow q_0$	q_1, q_3	q_1
$q_1 \Downarrow$	q_2	q_1, q_2
q_2	q_3	q_0
$q_3 \Downarrow$	—	q_0

(d)

$\mathbb{A}_4$	a	b
$\Rightarrow q_0$	q_0, q_1	q_0
q_1	q_2, q_3	q_4
q_2	q_1, q_2, q_4	—
q_3	—	—
$q_4 \Downarrow$	—	—

Opgave 2.7 Gegeven is een eindige automaat $\mathbb{A}$. Geef een eindige automaat $\mathbb{B}$ zó dat $L(\mathbb{B}) = L(\mathbb{A}) \circ L(\mathbb{A})$.