TD1: Rappel des limites

Exercice 1. On considère une suite de polynômes $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{Q}[t]^{\mathbb{N}}$ definie par $f_0(t)=1$ et $f_n(t)=\dfrac{t\,(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}$ et un operateur $\Delta:\mathbb{C}[t]\to\mathbb{C}[t]$ sur polynômes defini par $(\Delta\, f)(t)=f(t+1)-f(t)$ pour tout polynôme f. On remarque que $\Delta\, f_0=0$ et $\Delta\, f_{n+1}=f_n$ pour $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout entier $d\in\mathbb{N}$ et polynôme $f\in\mathbb{C}[t]$ de degré $\le d$, il existe a_0, $a_1,\cdots,a_d$ tel que $f=\sum_{k=0}^{d}a_k\,f_k$. De plus, $a_k=(\Delta^k\,f)(0)$ pour $k=0,\cdots,d$.

2. Calculer $\sum_{j=0}^{n}f_k(j)$ pour tout entier $n,k\in\mathbb{N}$.

3. En déduire la valeur de $\sum_{j=0}^{n}f(j)$ pour tout polynôme $f\in\mathbb{C}[t]$ en termes des $(\Delta^k\,f)(0)$ pour $k\in\mathbb{N}$. Écrire explicitement la valuer de $\sum_{j=0}^{n}j^2$ et $\sum_{j=0}^{n}j^3$.

4. Soient $z\in\mathbb{C}$ et $f\in\mathbb{C}[t]$. Étudier la convergence de $\sum_{j=0}^{n}f(j)\,z^j$ quand $n\to\infty$ sans calculer la valeur.

5. Calculer le polynôme $\sum_{j=0}^{n}f_k(j)\,u^{j-k}\in\mathbb{Q}[u]$ pour $n,k\in\mathbb{N}$. On remarque que $f_k(j)=0$ quand $j<k$. [Indication: considerons l'identité $\sum_{j=0}^{n}u^j=(u^{n+1}-1)\,/\,(u-1)$ et prenons les dérivées itérées.]

6. En déduire la valeur de $\sum_{j=0}^{n}f(j)\,z^j$ pour $z\in\mathbb{C}$ et polynôme $f\in\mathbb{C}[t]$ en termes des $(\Delta^k\,f)(0)$ pour $k\in\mathbb{N}$. Écrire explicitement la valuer de $\sum_{j=0}^{n}j\,z^j$.

7. De la même façon, calculer $\sum_{j=0}^{n}f(j)\,\binom{n}{j}$ pour $f\in\mathbb{C}[t]$. Écrire explicitement les valeurs de $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}$, $\sum_{j=0}^{n}j\,\binom{n}{j}$ et $\sum_{j=0}^{n}j^2\,\binom{n}{j}$.

Solution.

1. On montre par récurrence sur $d\in\mathbb{N}$ que f est une combinaison linéaire de $f_0,\cdots$, f_d. L'énoncé est vrai quand $d=0$. On suppose que l'énoncé est vrai pour $d-1$. Écrivons que $f(t)=\alpha_d\,t^d+g(t)$ où $g\in\mathbb{C}[t]$ et $\deg g<d$. Alors $f(t)-\alpha_d\,d!\;f_d(t)=\alpha_d\,(t^d-d!\;f_d(t))+g(t)$ est de degré $<d$, donc il existe $a_0,\cdots,a_{d-1}$ tel que $f(t)-\alpha_d\,d!\;f_d(t)=\sum_{k=0}^{d-1}a_k\,f_k(t)$, c'est-à-dire, $f=\alpha_d\,d!\;f_d+\sum_{k=0}^{d-1}a_k\,f_k$.

   Pour montrer que $a_k=(\Delta^k\,f)(0)$, on prend Δ^k sur l'égalité $f=\sum_{j=0}^{d}a_j\,f_j$ et évalue au point 0. Remarquons que $f_k(0)=0$ quand $k>0$ et $\Delta^k\,f_j=f_{j-k}$ où on note $f_k=0$ quand $k<0$.

2. $\sum_{j=0}^{n}f_k(j)=\sum_{j=0}^{n}(f_{k+1}(j+1)-f_{k+1}(j))=f_{k+1}(n+1)-f_{k+1}(0)=f_{k+1}(n+1)$.

3. $\sum_{j=0}^{n} f(j) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{d} (\Delta^k f)(0)\, f_k(j) = \sum_{k=0}^{d} (\Delta^k f)(0)\, f_{k+1}(n+1)$. Quand $f(t) = t^2$ et $f(t) = t^3$ respectivement, on calcule $\Delta^k f$ par tableaux

$t=$	0	1	2	3
$f(t)=t^2$	0	1	4	9
$(\Delta f)(t)=$	1	3	5	$\cdots$
$(\Delta^2 f)(t)=$	2	2	$\cdots$	

$t=$	0	1	2	3	4
$f(t)=t^3$	0	1	8	27	64
$(\Delta f)(t)=$	1	7	19	37	$\cdots$
$(\Delta^2 f)(t)=$	6	12	18	$\cdots$	
$(\Delta^3 f)(t)=$	6	6	$\cdots$		

Donc

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 = f_2(n+1) + 2\, f_3(n+1) = \frac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$$

$$\sum_{j=0}^{n} j^3 = f_2(n+1) + 6\, f_3(n+1) + 6\, f_4(n+1) = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$$

4. Si $|z| \geq 1$ et $f \neq 0$, $f(n)\, z^n$ ne converge pas à 0 quand $n \to \infty$ donc $\sum_{j=0}^{n} f(j)\, z^j$ diverge.

   Si $|z| < 1$, on pose $\alpha = (1 + |z|)/2$ alors

$$\left|\frac{f(n)\, z^n}{\alpha^n}\right| = |f(n)| \left|\frac{z}{\alpha}\right|^n \to 0$$

   Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que quand $n > N$, on a $|f(n)\, z^n| \leq \alpha^n$. Par conséquence, pour $n \geq m > N$, on a $|\sum_{j=m}^{n} f(j)\, z^j| \leq \sum_{j=m}^{n} \alpha^j \leq \alpha^m/(1-\alpha) \to 0$ quand $m \to \infty$, donc la suite $(\sum_{j=1}^{n} f(j)\, z^j)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy alors converge.

5.

$$\sum_{j=0}^{n} f_k(j)\, u^{j-k} = \frac{1}{k!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^k \left(\sum_{j=0}^{n} u^j\right) = \frac{1}{k!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)^k \frac{u^{n+1}-1}{u-1}$$

6. On a déjà calculé la somme quand $z = 1$. Supposons que $z \neq 1$ et notons que $d = \deg f$.

$$\sum_{j=0}^{n} f(j)\, z^j = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{d} (\Delta^k f)(0)\, f_k(j)\, z^j = \sum_{k=0}^{d} \frac{(\Delta^k f)(0)}{k!}\, z^k \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^k \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$$

Quand $f(t)=t$, on a

$$\sum_{j=0}^{n} j\,z^j = \frac{n\,z^{n+1}-(n+1)\,z^n+1}{(z-1)^2}\,z$$

7. On considère le polynôme en u:

$$\sum_{j=0}^{n} f_k(j)\binom{n}{j}u^{j-k} = \sum_{j=k}^{n} f_k(j)\binom{n}{j}u^{j-k} = \frac{1}{k!}\,f_k(n)\sum_{j=0}^{n}\binom{n-k}{j}u^j = f_k(n)\,(1+u)^{n-k}$$

Alors

$$\sum_{j=0}^{n} f(j)\binom{n}{j}u^j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{d}(\Delta^k f)(0)\,f_k(j)\binom{n}{j}u^j = \sum_{k=0}^{d}\frac{(\Delta^k f)(0)}{k!}\,u^k\,f_k(n)\,(1+u)^{n-k}$$

Quand $f(t)=1, t, t^2$ respectivement, on a $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}u^j=(1+u)^n$, $\sum_{j=0}^{n} j\binom{n}{j}u^j = n\,u\,(1+u)^{n-1}$ et $\sum_{j=0}^{n} j^2\binom{n}{j}u^j = n\,u\,(1+u)^{n-1}+n\,(n-1)\,u^2\,(1+u)^{n-2}$.

Exercice 2. Déterminer des limites des fonctions suivantes:

1. $\dfrac{\sin 3\,x}{\sin 5\,x}$ en $x=0$,

2. $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}{x}$ en $x=0$,

3. $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ quand $n\to\infty$,

4. $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$ quand $n\to\infty$,

5. $v_n=(d^{-1}\sum_{k=1}^{d} x_k^{1/n})^n$ quand $n\to\infty$, où les x_k sont des réels strictement positifs.

Solution.

1. On remarque que $\sin x\sim x$ quand $x\to 0$, donc $\lim_{x\to 0}\sin(3\,x)/\sin(5\,x)=3/5$.

2. Deux approches:

   - $$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}} \to \frac{1}{2} \text{ quand } x\to 0,$$

- $$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{\left(1+\dfrac{1}{2}x+O(x^2)\right)-(1+O(x^2))}{x}=\frac{1}{2}+O(x)$$

3. $(1+n^{-1})^n\to\exp(1)$,

4. $(1+n^{-2})^n=((1+1/n^2)^{n^2})^{1/n}\to\exp(0)=1$,

5. On remarque que pour tout constant $\alpha>0$, on a $\alpha^{1/n}=\exp(n^{-1}\log\alpha)=1+n^{-1}\ln\alpha+O(n^{-2})$ quand $n\to\infty$, donc $(d^{-1}\sum_{k=1}^d x_k^{1/n})^n=\exp(n\ln(1+(n\,d)^{-1}\sum_{k=1}^d\ln x_k+O(n^{-2})))=\exp(n\,((n\,d)^{-1}\sum_{k=1}^d\ln x_k+O(n^{-2})))=\exp(\ln(x_1\cdots x_d)^{1/d}+O(n^{-1}))=(x_1\cdots x_d)^{1/d}+O(n^{-1})$.

Exercice 3. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on définit $u_n=\sum_{k=0}^n 1/k!$ et $v_n=1/(n\cdot n!)+\sum_{k=0}^n 1/k!$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes,

2. On note e leur limite commune. Montrer que $e\notin\mathbb{Q}$.

Solution.

1. Évidemment la suite (u_n) est croissante. $v_{n+1}-v_n=1/((n+1)\cdot(n+1)!)+1/(n+1)!-1/(n\cdot n!)=-1/(n\,(n+1)\cdot(n+1)!)<0$ et $v_n-u_n=1/(n\cdot n!)\to 0$ quand $n\to\infty$.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $u_n<u_{n+1}\le e\le v_{n+1}<v_n$, donc $n!\,u_n<n!\,e<n!\,v_n=n!\,u_n+1/n\le n!\,u_n+1$. D'autant que $n!\,u_n\in\mathbb{Z}$, on a $n!\,e\notin\mathbb{Z}$. Par conséquence, $e\notin\mathbb{Q}$.

Exercice 4. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite des réels telle que $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$ et $l\le L$ deux valeurs d'adhérence de la suite (a_n). Montrer que pour tout $v\in[l,L]$, v est une valeur d'adhérence de la suite (a_n).

Solution. Si $v=l$ ou $v=L$, l'énoncé est évident. On suppose que $l<v<L$. Pour tout réel positif $\varepsilon<\min\{v-l,L-v\}/2$ et tout entier $N\in\mathbb{N}$, on va montrer qu'il existe un entier $n\ge N$ tel que $|a_n-v|<\varepsilon$. On prend un entier $N'\ge N$ tel que pour tout $n\ge N'$, on a $|a_{n+1}-a_n|<\varepsilon$. D'autant que l,L sont les valeurs d'adhérence, on peut choisir deux entiers $q>p\ge N'$ tel que $|a_p-l|<\varepsilon<v-l$ et $|a_q-L|<\varepsilon<L-v$, alors $a_p<v<a_q$. On choisit n l'entier maximal tel que $p\le n<q$ et que $a_n\le v$, alors $a_{n+1}>v$. Donc $\varepsilon>a_{n+1}-a_n>v-a_n$.

Exercice 5. Soient $f:[0,1]\to[0,1]$ une fonction continue et $x\in[0,1]$. On définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0=x$ et $a_{n+1}=f(a_n)$. Montrer que la suite (a_n) converge si et seulement si $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$.

Solution. On suppose que $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$, et on va montrer que la suite (a_n) converge. On note l la limite inférieure et L la limite supérieure de la suite (a_n). Remarquons que $0\leq l\leq L\leq 1$. Il suffit de montre que $l=L$. On montre par l'absurde. Si $l<L$, par l'exercice précédente, pour tout $v\in[l,L]$, v serait une valeur d'adhérence, alors il existerait une sous-suite $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui convergerait à v, et alors $a_{n_k+1}=a_{n_k}+(a_{n_k+1}-a_{n_k})\to v$ quand $k\to\infty$. D'autant que $a_{n_k+1}=f(a_{n_k})$ et que la fonction f est continue, $v=f(v)$ pour tout $v\in[l,L]$. On prendrait $\varepsilon=(L-l)/4$, et d'autant que $(l+L)/2$ serait une valeur d'adhérence, il existerait un entier n tel que $|a_n-(l+L)/2|<\varepsilon$, et alors $a_n=f(a_n)=a_{n+1}=f(a_{n+1})=a_{n+2}=\cdots$, alors (a_n) convergerait, ce serait absurde.

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes:

1. $\int_1^2\frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$,

2. $\int_2^3\cos(x)\exp(x)\,\mathrm{d}x$,

3. $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cos(x)\sin(x)^{-2}\,\mathrm{d}x$,

4. $\int_2^3(x^2+2x)\exp(x)\,\mathrm{d}x$.

Solution.

1. $\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{(x+1/2)+1/2}{(x+1/2)^2+3/4}=\frac{y}{y^2+3/4}+\frac{1}{2(y^2+3/4)}$ où $y=x+1/2$.

   $\int_{3/2}^{5/2}\frac{y\,\mathrm{d}y}{y^2+3/4}=\frac{1}{2}\int_I\frac{\mathrm{d}(y^2+3/4)}{y^2+3/4}=\frac{1}{2}\int_3^7\frac{\mathrm{d}t}{t}=(\ln 7-\ln 3)/2$,

   $\int_{3/2}^{5/2}\frac{\mathrm{d}y}{2(y^2+3/4)}=\pi/\sqrt{3}-\sqrt{3}\arctan(5/\sqrt{3})$

2. $I:=\int_2^3\cos(x)\,\exp(x)\,\mathrm{d}x=\sin(x)\,\exp(x)|_{x=2}^3+\int_2^3-\sin(x)\,\exp(x)\,\mathrm{d}x=(\sin(x)+\cos(x))\exp(x)|_{x=2}^3-I$

   Donc $I=\frac{1}{2}(\sin(x)+\cos(x))\exp(x)|_{x=2}^3$,

3. $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cos(x)\sin(x)^{-2}\,\mathrm{d}x=\int_I\sin(x)^{-2}\,\mathrm{d}\sin(x)=\int_{1/2}^1 t^{-2}\,\mathrm{d}t=1$,

4. $\int_2^3(x^2+2x)\exp(x)\,\mathrm{d}x=(x^2+2x)\exp(x)|_{x=2}^3-2x\exp(x)|_{x=2}^3+2\exp(x)|_{x=2}^3=9\exp(3)-4\exp(2)$.

Exercice 7. Soit $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}$ une fonction continue et pour tout $x\in\mathbb{R}_{>0}$, on a $\lim_{n\to\infty}f(nx)=0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. [Indication: pour tout $\varepsilon>0$, montrer qu'il existe un intervalle ouvert (non-vide et fini) $I\subseteq[1,2]$ et un entier $N>0$ tels que pour tout $x\in I$ et $n\geq N$, on a $|f(nx)|\leq\varepsilon$.]

Solution. Pour tout $\varepsilon > 0$, le but est de montrer qu'il existe $\Delta > 0$ tel que pour tout $x > \Delta$, on a $|f(x)| \leq \varepsilon$.

On commence par un lemme

Lemme 1. *Il existe un intervalle ouvert (non-vide et fini) $I \subseteq [1,2]$ et un entier $N > 0$ tels que pour tout $x \in I$ et $n \geq N$, on a $|f(n\,x)| \leq \varepsilon$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. On note E_N l'ensemble des réels $x > 0$ tels qu'il existe un entier $n \geq N$ tel que $|f(n\,x)| > \varepsilon$. D'autant que la fonction f est continue, l'ensemble E_N est ouvert. Par ce que l'on a supposé, pour tout invervalle ouvert (non-vide) $I \subseteq [1,2]$ et tout entier N, $I \cap E_N \neq \varnothing$. On fixe I_0 un intervelle ouvert (non-vide) tel que $I_0 \subseteq \bar{I}_0 \subseteq E_0$. On peut alors construire par récurrence une suite décroissante des intervalles ouverts (non-vides) $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $I_n \subseteq \bar{I_n} \subseteq E_n \cap I_{n-1}$. Ensuite, pour tout n, on choisit un point $x_n \in I_n$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [1,2]^{\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $x \in [1,2]$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \geq n$, on a $x_m \in I_m \subseteq \bar{I_n}$, donc $x \in \bar{I_n}$. Par conséquence, $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{I_{n+1}} \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$, qui entraine que pour tout entier N, il existe un untier $n \geq N$ tel que $|f(n\,x)| > \varepsilon$. C'est absurde parce que $\lim_{n \to \infty} f(n\,x) = 0$. □

Par ce lemme, on peux choisir un intervalle ouvert $]a,b[$ et un entier $N > 0$ tels que pour tout $x \in I$ et $n \geq N$, on a $|f(n\,x)| \leq \varepsilon$. On choisit un entier $M \geq N$ tel que $a\,(M+1) < b\,M$. Alors $\{n\,x | n \geq N, x \in I\} \supseteq [a\,(M+1), +\infty[$. On prend $\Delta = a\,(M+1)$.