TD1: Rappel des limites

Exercice 1. On considère une suite de polynômes $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{Q}[t]^{\mathbb{N}}$ definie par $f_0(t)=1$ et $f_n(t)=\dfrac{t\,(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}$ et un operateur $\Delta:\mathbb{C}[t]\to\mathbb{C}[t]$ sur polynômes defini par $(\Delta\, f)(t)=f(t+1)-f(t)$ pour tout polynôme f. On remarque que $\Delta\, f_0=0$ et $\Delta\, f_{n+1}=f_n$ pour $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout entier $d\in\mathbb{N}$ et polynôme $f\in\mathbb{C}[t]$ de degré $\leq d$, il existe a_0, $a_1,\cdots,a_d$ tel que $f=\sum_{k=0}^{d} a_k\, f_k$. De plus, $a_k=(\Delta^k\, f)(0)$ pour $k=0,\cdots,d$.

2. Calculer $\sum_{j=0}^{n} f_k(j)$ pour tout entier $n,k\in\mathbb{N}$.

3. En déduire la valeur de $\sum_{j=0}^{n} f(j)$ pour tout polynôme $f\in\mathbb{C}[t]$ en termes des $(\Delta^k\, f)(0)$ pour $k\in\mathbb{N}$. Écrire explicitement la valuer de $\sum_{j=0}^{n} j^2$ et $\sum_{j=0}^{n} j^3$.

4. Soient $z\in\mathbb{C}$ et $f\in\mathbb{C}[t]$. Étudier la convergence de $\sum_{j=0}^{n} f(j)\, z^j$ quand $n\to\infty$ sans calculer la valeur.

5. Calculer le polynôme $\sum_{j=0}^{n} f_k(j)\, u^{j-k}\in\mathbb{Q}[u]$ pour $n,k\in\mathbb{N}$. On remarque que $f_k(j)=0$ quand $j<k$. [Indication: considerons l'identité $\sum_{j=0}^{n} u^j=(u^{n+1}-1)\,/\,(u-1)$ et prenons les dérivées itérées.]

6. En déduire la valeur de $\sum_{j=0}^{n} f(j)\, z^j$ pour $z\in\mathbb{C}$ et polynôme $f\in\mathbb{C}[t]$ en termes des $(\Delta^k\, f)(0)$ pour $k\in\mathbb{N}$. Écrire explicitement la valuer de $\sum_{j=0}^{n} j\, z^j$.

7. De la même façon, calculer $\sum_{j=0}^{n} f(j)\,\binom{n}{j}$ pour $f\in\mathbb{C}[t]$. Écrire explicitement les valeurs de $\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}$, $\sum_{j=0}^{n} j\,\binom{n}{j}$ et $\sum_{j=0}^{n} j^2\,\binom{n}{j}$.

Exercice 2. Déterminer des limites des fonctions suivantes:

1. $\dfrac{\sin 3\,x}{\sin 5\,x}$ en $x=0$,

2. $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}{x}$ en $x=0$,

3. $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ quand $n\to\infty$,

4. $u_n=\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$ quand $n\to\infty$,

5. $v_n = (d^{-1}\sum_{k=1}^{d} x_k^{1/n})^n$ quand $n \to \infty$, où les x_k sont des réels strictement positifs.

Exercice 3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k!$ et $v_n = 1/(n \cdot n!) + \sum_{k=0}^{n} 1/k!$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes,
2. On note e leur limite commune. Montrer que $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 4. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite des réels telle que $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$ et $l \leq L$ deux valeurs d'adhérence de la suite (a_n). Montrer que pour tout $v \in [l, L]$, v est une valeur d'adhérence de la suite (a_n).

Exercice 5. Soient $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue et $x \in [0,1]$. On définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = x$ et $a_{n+1} = f(a_n)$. Montrer que la suite (a_n) converge si et seulement si $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes:

1. $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$,
2. $\int_2^3 \cos(x)\exp(x)\,\mathrm{d}x$,
3. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos(x)\sin(x)^{-2}\,\mathrm{d}x$,
4. $\int_2^3 (x^2 + 2x)\exp(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et pour tout $x \in \mathbb{R}_{>0}$, on a $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. [Indication: pour tout $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe un intervalle ouvert (non-vide et fini) $I \subseteq [1,2]$ et un entier $N > 0$ tels que pour tout $x \in I$ et $n \geq N$, on a $|f(nx)| \leq \varepsilon$.]