TD1 Supplément

Exercice 1. On a vu dans TD1 que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par $a_n=(1+n^{-1})^n$ et $b_n=\sum_{k=0}^{n} 1/k!$ convergent. Montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$.

Solution. On remarque que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

D'un côté, $1-k/n\leq 1$ implique que $a_n=(1+n^{-1})^n\leq\sum_{k=0}^{n}1/k!=b_n$, donc $\lim_{n\to\infty}a_n\leq\lim_{n\to\infty}b_n$. De l'autre côté, on fixe $m\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $n\geq m$, on a

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\geq\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

Quand $n\to\infty$, on a $\lim_{n\to\infty}a_n\geq\sum_{k=0}^{m}1/k!=b_m$ pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, donc $\lim_{n\to\infty}a_n\geq\lim_{n\to\infty}b_n$.

Exercice 2. On définit une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x$$

Montrer que $\lim_{n\to\infty}I_n=0$.

Solution. Fixons $\eta\in\,]0,\pi/2[$. On a

$$0\leq I_n=\int_0^{\eta}\sin^n x\,\mathrm{d}x+\int_{\eta}^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x\leq\sin^n\eta+\left(\frac{\pi}{2}-\eta\right)$$

où on a utilisé le fait que $0\leq\sin^n x\leq 1$ pour $x\in[0,\pi/2]$ et que $\sin^n x\leq\sin^n\eta$ pour $x\in[0,\eta]$. Prenons $n\to\infty$, on en déduit que $0\leq\liminf_{n\to\infty}I_n\leq\limsup_{n\to\infty}I_n\leq\frac{\pi}{2}-\eta$ pour tout $\eta\in\,]0,\pi/2[$, donc $\lim_{n\to\infty}I_n=0$.