Feuille 2

Exercice 1.
Déterminer si les séries suivantes sont convergentes

1. $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k^2-1}$,
2. $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$,
3. $\sum_{k\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$,
4. $\sum_{k\geq 0} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{2^k}\right)\right)$.
5. $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$,
6. $\sum_{n>0} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$,
7. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+3n}{n^3+1}$,
8. $\sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,
9. $\sum_{n\geq 2} \frac{1+\ln(n)}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ pour $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$,
10. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \sin(n)}{n \ln(n)^2}$,
11. $\sum_{n\geq 0} e^{-n^2}$,
12. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=1}^n k^2}$.

Solution:

1. On a $\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$ et
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$
Alors $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k^2-1}$ converge.
2. Pour chaque $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$ on a
$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} \leq \frac{1}{k^2-1}.$$
Alors $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ converge.
3. Converge car $\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) \sim -\frac{1}{k^2}$.

4. On sait que $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{\ln\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}}{\frac{-x}{1-\frac{x^2}{2}}} = 1$$

donc

$$\ln(\cos(x)) \sim_0 \ln\left(1 - \frac{x^2}{2}\right).$$

Alors

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{2^k}\right)\right) \quad - \frac{1}{2^{k+1}}$$

et $\sum_{k\geq 0} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{2^k}\right)\right)$ converge.

5. la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2+1)^2}$ converge absolumment car $0 < \frac{n^2}{(n^2+1)^2} < \frac{1}{n^2}$ et on dèja sait que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

6. On va demontrer que la serie diverge.

$$\begin{aligned} e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1 =& e^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1} - 1 = e^{n(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+o(n^{-2}))-1)-1} - 1 \\ =& e^{\frac{-2}{n}+o(n^{-1})} - 1 = -\frac{2}{n} + o(n^{-1}). \end{aligned}$$

Par consequent

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right) =& e\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right) \\ =& e\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{n} + o(n^{-1})\right) = -\infty \end{aligned}$$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n}{n^3+1}$ diverge car $\frac{n^2+3n}{n^3+1} > \frac{n^2+3n}{n^3+3n^2} = \frac{1}{n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

8. On $\frac{n!n!}{(2n)!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k} \leq 2^{-n}$. On en deduit que la serie converge.

9. On va demontrer que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ converge si $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Si $\beta \geq 0$ on a $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ donc la serie converge. Si $\beta < 0$ on utilise le fait que $\log n = O(n^\varepsilon)$ pour chaque $\varepsilon > 0$ donc $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = O(\frac{1}{n^{\alpha+\beta\varepsilon}})$. On en deduit la convregence de notre serie car on peut prendre $\varepsilon > 0$ tel que $\alpha + \beta\varepsilon > 1$.

10. $\left|\frac{(-1)^n \sin(n)}{n(\ln n)^2}\right| \leq \frac{1}{n(\ln n)^2}$. La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge car la fonction $x \to \frac{1}{x(\ln x)^2}$ est decroissante sur $[2, +\infty)$ et

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}dx = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{u^2}du < +\infty.$$

On en deduit la convergence de la serie initiale.

11. la serie converge car $e^{-n^2} < 2^{-n}$.

12. $\frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=1}^n k^2} \geq \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=1}^n nk} = \frac{1}{n}$ donc la serie diverge.

Exercice 2.

1. Rappeler pourquoi la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge. Montrer que sa somme vaut $\ln(2)$ (Indication: on pourra calculer $\int_0^1 (-t)^{k-1} dt$).

2. Donner un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ (Indication: Comparer avec une integrale).

Solution:

1. Par critère des séries alternées $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.
   On a
   $$\int_0^1 (-t)^{n-1} dt = (-1)^{n-1} \left. \frac{t^n}{n} \right|_0^1 = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$
   Alors
   $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n} &= \sum_{n=1}^N \int_0^1 (-t)^{n-1} dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^N (-t)^{n-1} \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1-(-t)^N}{1+t} dt = \int_1^2 \frac{1}{z} dz - \int_0^1 \frac{(-t)^N}{1+t} \\ &= \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^N}{1+t} dt.\end{aligned}$$
   On a
   $$\int_0^1 \frac{(-t)^N}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^N dt = \frac{1}{N+1}.$$
   Alors
   $$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

2. Soit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. La fonction f est decroissante et pour chaque $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$ on a
   $$\int_k^{k+1} f(x) dx \leq \int_k^{k+1} f(k) dx \quad \text{et} \quad \int_{k-1}^k f(k) dx \leq \int_{k-1}^k f(x) dx.$$
   Alors
   $$\int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx.$$

On a

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \int_{k}^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=n+1}^{2n} f(k) \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \int_{k-1}^{k} f(x)dx$$

$$\int_{n+1}^{2n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=n+1}^{2n} f(k) \leq \int_{n}^{2n} f(x)dx$$

$$2\sqrt{x}\Big|_{n+1}^{2n+1} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} f(k) \leq 2\sqrt{x}\Big|_{n}^{2n}$$

$$2(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}) \leq \sum_{k=n+1}^{2n} f(k) \leq 2(\sqrt{2n} - \sqrt{n}).$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1})}{2\sqrt{n}(\sqrt{2}-1)} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2(\sqrt{2n} - \sqrt{n})}{2\sqrt{n}(\sqrt{2}-1)} = 1.$$

Alors

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}(\sqrt{2}-1).$$

Exercice 3.
Déterminer si les séries suivantes sont convergentes.

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+2}$,
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{5}\right)}{n}$,
4. $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}}$,
5. $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n+1}{\ln(n)}$,
6. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{3+(-1)^n n^2}$.

Solution:

1. et 2. Par le critère des séries alternées les séries convergent.
3. On a $\cos\left(\frac{n\pi}{5}\right) = \Re e^{\frac{in\pi}{5}}$ et

$$\sum_{n=1}^{m} \cos\left(\frac{n\pi}{5}\right) = \Re \sum_{n=1}^{m} e^{\frac{in\pi}{5}} = \Re\left(e^{\frac{i\pi}{5}\cdot \frac{e^{\frac{(m+1)i\pi}{5}}-1}{e^{\frac{i\pi}{5}}-1}}\right).$$

On a

$$\left|e^{\frac{i\pi}{5}} \frac{e^{\frac{(m+1)i\pi}{5}}-1}{e^{\frac{i\pi}{5}}-1}\right| = \left|\frac{e^{\frac{(m+1)i\pi}{5}}-1}{e^{\frac{i\pi}{5}}-1}\right| \leq \frac{2}{\left|e^{\frac{i\pi}{5}}-1\right|}.$$

Puisque

$$z \in \mathbb{C} \quad \text{on a} \quad |\Re z| \leq |z|$$

on a

$$\sum_{n=1}^{m} \cos\left(\frac{n\pi}{5}\right) \leq \frac{2}{\left|e^{\frac{i\pi}{5}} - 1\right|}$$

et par le critère de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{5}\right)}{n}$ converge.

4. La fonction $\mathbb{N} \ni n \to \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \in \mathbb{R}$ est décroissante à partir d'un $N \in \mathbb{N}$. Alors par le critère des alternées $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}}$ converge.

5. Par le critère dse séries alternées $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge. Si $n \geq 2$ on a

$$\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n}$$

donc $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln n}$ diverge. Alors $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n+1}{\ln n}$ diverge.

6. Si $n \geq 2$ on a

$$\left|\frac{1}{3+(-1)^n n^2}\right| = \frac{1}{(-1)^n 3 + n^2}.$$

Alors $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{3+(-1)^n n^2}$ converge.

Exercice 4.
Soit u_n une suite décroissante dont la série converge, montrer que $u_n = o(1/n)$.

Solution:
On a $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ donc la decroissance implique que $u_n \geq 0$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Si $u_n \neq o(\frac{1}{n})$ alors il existe une suite strictement croissante $(n_i)_{i=1}^{\infty}$ des nombres naturels et une croissante $c > 0$ tel que $u_{n_i} \geq \frac{c}{n_i}$ pour $i \in \mathbb{N}$. Quitte a prendre une sous suite on peut admettre que $n_i \geq 2n_{i-1}$. Posons $n_0 = 0$ et remarquons que $n_i \geq i$. On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(n_i - n_{i-1})c}{n_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c}{2} = +\infty.$$

Exercice 5.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent. Montrer que $\sum u_n v_n$ converge.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\sum \frac{1}{1+n^2 u_n}$ converge. Montrer que $\sum u_n$ diverge.

Solution:
1) On a $2|uv| \leq u^2 + v^2$ donc $2\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n^2 < +\infty$.
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 u_n}$ converge alors $n^2 u_n \geq 1$ pour $n \geq n_0$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2 u_n} \leq 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2 u_n} < +\infty.$$

Si $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ convergeait, la serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{n^2 u_n}} = \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

convergerait aussi, par (1). Cette contradiction montre que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge.

Exercice 6. Soit (u_n) une suite telle que $u_n \neq 0$ pour presque tout n. On souhaite montrer critère de Raabe: Si pour une certaine constante $C > 1$ et un certain réel $\varepsilon > 0$ on a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1 - \frac{C}{n} + O(n^{-1-\varepsilon})$$

alors $\sum u_n$ converge absolument.

1. Soit (a_n) et (b_n) des suites de nombres réels strictement positifs. On suppose que pour un certain $N \in \mathbb{N}$ on ait

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant N.$$

   Montrer que si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge aussi. (Indication: Étudier la suite (a_n/b_n)).

2. Utiliser le critère précédent appliqué aux suites (a_n) et (n^{-s}), où $1 < s < C$, pour montrer le critère de Raabe.

Solution:
1) La suite $\frac{a_n}{b_n}$ est d'écroissante pour $n \geq N$. Soit ainsi $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $M \geq \frac{a_n}{b_n}$ por tout $n \geq N$. On obtient $a_n \leq M b_n$ et le résultat suit. 2) Soit $1 < s < C$. Le développement limité de la fonction $x \mapsto (1+x)^{-s}$ en zéro permet de d'écrire

$$\frac{(n+1)^{-s}}{n^{-s}} = (1 + \frac{1}{n})^{-s} = 1 - \frac{s}{n} + O(n^{-2}).$$

Par conséquent, (on suppose $\varepsilon < 1$)

$$\frac{(n+1)^{-s}}{n^{-s}} - \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{-s + C}{n} + O(n^{-1-\varepsilon}).$$

Or, comme $-s + C > 0$, il existe un N tel que pour $n \geq N$ on a

$$\frac{(n+1)^{-s}}{n^{-s}} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 0,$$

d'où la partie (1) peut être appliqué.

Exercice 7. Dans cet exercice on trouve une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une permutation des nombres naturels $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que les series $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ convergent mais $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$.

1. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$.

2. Montrer la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\sigma(n)+1}}{\sigma(n)} = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\dots$ où $\sigma(3m+1)=4m+1, \sigma(3m+2)=4m+3$ et $\sigma(3m+3)=2m+2$, pour $m \geq 0$.

3. Monter que la limite de la deuxieme serie est strictement plus grande que celle de la premiere. (Indication: Il n'y a pas besoin de calculer la valeur explicite de la deuxieme serie).

Solution: 1) $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \int_0^1 \frac{1+x^N}{1+x} dx$. Pour chaque $x \in [0,1)$ on a la suite $\frac{1+x^N}{1+x}$ est decroissante en N et $\lim_{N\to\infty} \frac{1+x^N}{1+x} = \frac{1}{1+x}$. On en deduit que

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2.$$

2)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\sigma(n)+1}}{\sigma(n)} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4m+1} + \frac{1}{4m+3} - \frac{1}{2m+2}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{8m+5}{(4m+1)(4m+3)(2m+2)} = O(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m^2}) < \infty.\end{aligned}$$

3) On a $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)(2m+2)}$. Allors, grace a nos calculs de point 2) il suffit de montrer que

$$\frac{8m+5}{(4m+1)(4m+3)(2m+2)} > \frac{1}{(2m+1)(2m+2)}$$

pour $m \geq 0$. On a

$$\begin{aligned}\frac{8m+5}{(4m+1)(4m+3)(2m+2)} &> \frac{1}{(2m+1)(2m+2)} \\ \frac{8m+5}{(4m+1)(4m+3)} &> \frac{1}{(2m+1)} \\ (8m+5)(2m+1) &> (4m+1)(4m+3) \\ 2m+2 &> 0.\end{aligned}$$