Feuille 2

Exercice 1.
Déterminer si les séries suivantes sont convergentes

1. $\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k^2-1}$,
2. $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$,
3. $\sum_{k\geq 2} \ln(1-\frac{1}{k^2})$,
4. $\sum_{k\geq 0} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{2^k}\right)\right)$.
5. $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{(1+n^2)^2}$,
6. $\sum_{n>0} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$,
7. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+3n}{n^3+1}$,
8. $\sum_{n\geq 0} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,
9. $\sum_{n\geq 2} \frac{1+\ln(n)}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ pour $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$,
10. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \sin(n)}{n\ln(n)^2}$,
11. $\sum_{n\geq 0} e^{-n^2}$,
12. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sum_{k=1}^n k}{\sum_{k=1}^n k^2}$.

Exercice 2.

1. Rappeler pourquoi la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge. Montrer que sa somme vaut $\ln(2)$ (Indication: on pourra calculer $\int_0^1 (-t)^{k-1}dt$).
2. Donner un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ (Indication: Comparer avec une integrale).

Exercice 3.
Déterminer si les séries suivantes sont convergentes.

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+2}$,
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$,
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{5}\right)}{n}$,
4. $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n \ln(n)}{\sqrt{n}}$,
5. $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n+1}{\ln(n)}$,
6. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{3+(-1)^n n^2}$.

Exercice 4.
Soit u_n une suite décroissante dont la série converge, montrer que $u_n = o(1/n)$.
Exercice 5.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent. Montrer que $\sum u_n v_n$ converge.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\sum \frac{1}{1+n^2 u_n}$ converge. Montrer que $\sum u_n$ diverge.

Exercice 6. Soit (u_n) une suite telle que $u_n \neq 0$ pour presque tout n. On souhaite montrer critère de Raabe: Si pour une certaine constante $C > 1$ et un certain réel $\varepsilon > 0$ on a

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = 1 - \frac{C}{n} + O(n^{-1-\varepsilon})$$

alors $\sum u_n$ converge absolument.

1. Soit (a_n) et (b_n) des suites de nombres réels strictement positifs. On suppose que pour un certain $N \in \mathbb{N}$ on ait

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant N.$$

   Montrer que si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge aussi. (Indication: Étudier la suite (a_n/b_n)).

2. Utiliser le critère précédent appliqué aux suites (a_n) et (n^{-s}), où $1 < s < C$, pour montrer le critère de Raabe.

Exercice 7. Dans cet exercice on trouve une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une permutation des nombres naturels $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que les series $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ convergent mais $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \neq \sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma(n)}$.

1. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$.

2. Montrer la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\sigma(n)+1}}{\sigma(n)} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$ où $\sigma(3m+1) = 4m+1, \sigma(3m+2) = 4m+3$ et $\sigma(3m+3) = 2m+2$, pour $m \geq 0$.

3. Monter que la limite de la deuxieme serie est strictement plus grande que celle de la premiere. (Indication: Il n'y a pas besoin de calculer la valeur explicite de la deuxieme serie).