TD2 Supplément

Exercice 1. Pour rappeler la preuve du critère de d'Alembert

On a vu dans TD2 que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2}{(2\,(n+1))!} \Big/ \frac{(n!)^2}{(2\,n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2\,(n+1)\,(2\,n+1)} = \frac{1}{4}$$

En utilisant ce fait, montrer que pour tout $q \in]1/4, 1[$, il existe $C_q > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$\frac{(n!)^2}{(2\,n)!} \leq C_q\, q^n$$

Exercice 2. (Test de condensation de Cauchy) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive décroissante. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k\, a_{2^k}$ converge. [Indication: pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $2^k\, a_{2^k} \leq \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n \leq 2^k\, a_{2^{k+1}}$.]

Exercice 3. (Riemann) Soit s un réel positif. En utilisant Exercice 2, montrer que la série $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ converge si et seulement si $s > 1$.

Exercice 4. (Bertrand) Soit t un réel positif. En utilisant Exercice 2 et Exercice 3, montrer que la série $\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1}\,(\ln n)^{-t}$ converge si et seulement si $t > 1$.

Exercice 5. Soient s, t deux réels positifs. En utilisant Exercice 3 et Exercice 4, montrer que la série $\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s}\,(\ln n)^{-t}$ converge si et seulement si $s > 1$ ou ($s = 1$ et $t > 1$).

Exercice 6. (Test d'Abel) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites. Supposons que la suite (a_n) est décroissante et bornée, et que la suite des sommes partiels (B_n) converge, où $B_0 = 0$ et $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, b_n$ converge. [Indication: $\sum_{n=1}^{N} a_n\, b_n = \sum_{n=1}^{N} (a_n - a)\, b_n + a \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.]