TD3: Intégrales Généralisées

Exercice 1. Déterminer la nature des intégrales suivantes et, le cas échéant, calculer la valeur:

1. $\int_0^{+\infty} \cos(2\,t+1)\,\mathrm{d}t$,

2. $\int_0^1 (1+t)^{-2} \ln t\,\mathrm{d}t$,

3. $\int_0^{+\infty} (1+t^2)^{-2}\,\mathrm{d}t$,

4. $\int_1^{+\infty} (1+t)^{-2} \ln t\,\mathrm{d}t$,

5. $\int_0^{+\infty} (t^2-1)^{-1}\,\mathrm{d}t$,

6. $\int_a^b ((t-a)\,(b-t))^{-1/2}\,\mathrm{d}t$, où $a \leq b$ sont deux réels.

Solution.

N°	Singularité(s)	Nature	Raisonnement	Valeur
1	$+\infty$	DV	$\int_{k\pi-1/2}^{k\pi+\pi/4-1/2} \cos(2\,t+1)\,\mathrm{d}t = 1/2,\ k \in \mathbb{N}^*$ (Cauchy)	
2	0	CVA	$(1+t)^{-2} \ln t \sim \ln t$ quand $t \to 0^+$	$-\ln 2$
3	$+\infty$	CVA	$(1+t^2)^{-2} \sim t^{-4}$ quand $t \to 0$	$\pi/4$
4	$+\infty$	CVA	$(1+t)^{-2} \ln t \sim t^{-2} \ln t$ quand $t \to \infty$	$\ln 2$
5	$1, +\infty$	DV	$(t^2-1)^{-1} \sim 2^{-1}\,(t-1)^{-1}$ quand $t \to 1$	
6	a, b	CVA		π

2.

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t &= -\frac{\ln t}{1+t}\bigg|_{t=\varepsilon}^1 + \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}t}{t\,(1+t)} \\
&= -\frac{\ln t}{1+t} + \ln t - \ln(1+t)\bigg|_{t=\varepsilon}^1 \\
&= \frac{t \ln t}{1+t} - \ln(1+t)\bigg|_{t=\varepsilon}^1
\end{aligned}$$

Prendre $\varepsilon \to 0^+$, on a $\int_0^1 (1+t)^{-2} \ln t\,\mathrm{d}t = -\ln 2$.

3. On remarque que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2}\bigg|_{t=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} t\,\frac{2\,t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = 2\left(\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\right)$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

4. Similaire à la question 2.

6. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(t-a)\,(b-t)}} &\sim \frac{1}{\sqrt{b-a}}\,(t-a)^{-1/2} \quad \text{quand } t \to a^+ \\ \frac{1}{\sqrt{(t-a)\,(b-t)}} &\sim \frac{1}{\sqrt{b-a}}\,(b-t)^{-1/2} \quad \text{quand } t \to b^- \end{aligned}$$

Donc l'intégrale converge.

Pour calculer la valeur, on commence par l'identité

$$(t-a)\,(b-t) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

qui nous permit de déterminer l'intégrale indéfinie

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-a)\,(b-t)}} = \arcsin \frac{2\,t-a-b}{b-a} + C$$

Donc la valeur d'intégrale définie est π.

Exercice 2. Pour tout réel $a \neq 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$f_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^n}$$

Montrer par récurrence que les intégrales $f_n(a)$ convergent et établir une formule de récurrence entre $f_{n+1}(a)$ et $f_n(a)$. En déduire la valeur de $f_n(a)$ pour tout n.

Solution.

Tout d'abord, $+\infty$ est la seule singularité de $f_n(a)$ pour tout réel $a \neq 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. D'autant que $(t^2+a^2)^{-n} \sim t^{-2n}$ quand $t \to +\infty$, donc les intégrales $f_n(a)$ convergent. Alors par IPP,

$$f_n(a) = \frac{t}{(t^2+a^2)^n}\bigg|_{t=0}^{+\infty} + 2\,n \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^{n+1}} = 2\,n\,(f_n(a) - a^2\,f_{n+1}(a))$$

donc

$$f_{n+1}(a) = \frac{2\,n-1}{2\,n\,a^2}\,f_n(a)$$

De plus, $f_1(a) = \int_0^{+\infty} (t^2+a^2)^{-2}\,\mathrm{d}t = a^{-1}\arctan(t/a)|_{t=0}^{+\infty} = 2^{-1}\,|a|^{-1}\,\pi$

Donc

$$f_n(a) = \frac{(2\,n-3)!!}{2^n\,|a|^{2n-1}\,(n-1)!}\,\pi$$

Exercice 3. Déterminer la nature des intégrales suivantes:

1. $\int_0^1 t^{-2}\sin t\,\mathrm{d}t$,
2. $\int_0^1 (1-\cos t)\,(\sin t)^{-4}\,\mathrm{d}t$,
3. $\int_0^1 (e^t-1)\,|\ln(1+t)|^{-1.5}\,\mathrm{d}t$,
4. $\int_0^1 ((1+t)^{3.5}-1)\cot t\,\mathrm{d}t$,
5. $\int_0^{+\infty} t\,(1+t^2)^{-\alpha}\ln t\,\mathrm{d}t$,
6. $\int_1^2 t^{-1}(\ln t)^{-3}\,\mathrm{d}t$,
7. $\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln(\cos(1/t))\,\mathrm{d}t$,
8. $\int_0^{+\infty} t^{1/2}\sin(t^{-1/2})\,(\ln(1+t))^{-1}\,\mathrm{d}t$,
9. $\int_0^{+\infty} x^{-1/2}\exp\left(-\sqrt{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x$,
10. $\int_0^{+\infty} t^{-\alpha}\sin t\,\mathrm{d}t$,
11. $\int_0^{+\infty} s^{-\beta}\,((1+s)^{\alpha}-s^{\alpha})\,\mathrm{d}s$,
12. $\int_{e^2}^{+\infty} t^{-\alpha}\,(\ln t)^{-\beta}\,(\ln\ln t)^{-\gamma}\,\mathrm{d}t$,
13. $\int_0^{+\infty} \sin t^2\,\mathrm{d}t$.

Solution.

1. DV, $t^{-2}\sin t \sim t^{-1}$ quand $t\to 0$.
2. DV, $(1-\cos t)\,(\sin t)^{-4} \sim 2^{-1}\,t^{-2}$ quand $t\to 0$.

3. CVA, $0 \le (e^t-1)\,(\ln(1+t))^{-1.5} \sim t^{-1/2}$ quand $t \to 0$.

4. La fonctionne est bornée (en fait, ce n'est pas une intégrale impropre): $\lim_{t\to 0^+}((1+t)^{3.5}-1)\cot t = 3.5$.

5. Remarquons que $\lim_{t\to 0^+} t\ln t = 0$. $+\infty$ est la seule singularité de l'intégrale. $0 \le t\,(1+t^2)^{-\alpha}\ln t \sim t^{1-2\alpha}\ln t$ quand $t\to+\infty$, donc l'integrale CVA si $\alpha>1$, et elle DV si $\alpha \le 1$.

6. DV, $t^{-1}(\ln t)^{-3} \sim (t-1)^{-3}$ quand $t \to 1^+$.

7. Tout d'abord, $0 < \cos(1/t) < 1$ quand $2/\pi < t < +\infty$, donc $\ln(\cos(1/t)) < 0$.

   Les singularités: $2/\pi, +\infty$.

   - Étude de $t \to 2/\pi$:

     $$\cos\frac{1}{t} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{t}\right) = \sin\frac{\pi\,(t-2/\pi)}{2\,t} \sim \frac{\pi^2\,(t-2/\pi)}{4}$$

     donc

     $$\ln\left(\cos\frac{1}{t}\right) = \ln\left(t-\frac{2}{\pi}\right) + \ln\frac{\pi^2}{4} \sim \ln\left(t-\frac{2}{\pi}\right)$$

     Par critère de Bertrand, $\int_{2/\pi}^{1}\ln(\cos(1/t))\,\mathrm{d}t$ converge (absolument).

   - Étude de $t \to +\infty$:

     $$\cos\frac{1}{t} = 1 - \frac{1}{2\,t^2} + O\left(\frac{1}{t^4}\right)$$

     donc

     $$\ln\left(\cos\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{2\,t^2} + O\left(\frac{1}{t^4}\right) \sim -\frac{1}{2\,t^2}$$

     Par critère de Riemann, $\int_{1}^{+\infty}\ln(\cos(1/t))\,\mathrm{d}t$ converge (absolument).

8. DV, $t^{1/2}\sin(t^{-1/2})\,(\ln(1+t))^{-1} \sim 1/\ln t$ quand $t\to+\infty$ (Remarque: il est positif quand t est assez grand.)

9. CVA. $x^{-1/2}\exp\left(-\sqrt{x^2+x+1}\right) \sim e^{-1}x^{-1/2}$ quand $x \to 0^+$, et $x^{-1/2}\exp\left(-\sqrt{x^2+x+1}\right) = x^{-1/2}\exp\left(-x\sqrt{1+x^{-1}+O(x^{-2})}\right) = x^{-1/2}\exp(-x\,(1+2^{-1}x^{-1}+O(x^{-2}))) \sim e^{-1/2}x^{-1/2}e^{-x}$ quand $x\to+\infty$.

10. Quand $\alpha \le 0$, on a $\int_{2k\pi+\pi/6}^{2k\pi+\pi/2} t^{-\alpha}\sin t\,\mathrm{d}t \ge (2^{-1}-6^{-1})\,\pi\sin(\pi/6)$ pour $k\in\mathbb{N}^*$, donc l'intégrale diverge.

Quand $\alpha > 0$, les singularités (potentielles): $0, +\infty$.

- Étude de $t \to 0^+$: $t^{-\alpha} \sin t \sim t^{-\alpha+1}$. Quand $\alpha < 2$, l'intégrale $\int_0^1$ converge (absolument). Quand $\alpha \geq 2$, l'intégrale divergent.

- Étude de $t \to +\infty$: l'intégrale $\int_1^{+\infty}$ converge par le critère de Dirichlet (la fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ est décroissante et converge à 0 quand $t \to +\infty$; la fonction $y \mapsto \int_1^y \sin t \, \mathrm{d}t$ est bornée). De plus, quand $\alpha > 1$, l'intégrale converge absolument parce que $|t^{-\alpha} \sin t| \leq t^{-\alpha}$. En revanche, quand $0 < \alpha \leq 1$, on a $|t^{-\alpha} \sin t| \geq t^{-\alpha} \sin^2 t = t^{-\alpha} (1 - \cos 2\, t) / 2$, et comme au-dessus, par le critère de Dirichlet, $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} \cos 2\, t \, \mathrm{d}t$ converge, mais $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} \, \mathrm{d}t$ diverge, donc l'integrale $\int_1^{+\infty} |t^{-\alpha} \sin t| \mathrm{d}t$ diverge. Du coup, quand $0 < \alpha \leq 1$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} \sin t \, \mathrm{d}t$ semi-converge, et quand $\alpha > 1$, l'intégrale converge absolument.

- Conclusion: quand $\alpha \leq 0$ ou $\alpha \geq 2$, l'intégrale DV; quand $0 < \alpha \leq 1$, l'intégrale SCV; quand $1 < \alpha < 2$, l'intégrale CVA.

11. Quand $\alpha = 0$, l'intégrale converge (en effet, est nulle).

    Quand $\alpha \neq 0$, les singularités (potentielles): $0, +\infty$.

    - Étude de $s \to 0^+$:

      Quand $\alpha < 0$, $s^{-\beta} ((1 + s)^\alpha - s^\alpha) \sim -s^{\alpha - \beta}$. Donc l'intégrale $\int_0^1$ converge si $\beta < \alpha + 1$, et diverge sinon.

      Quand $\alpha > 0$, $s^{-\beta}((1 + s)^\alpha - s^\alpha) \sim s^{-\beta}$. Donc l'intégrale $\int_0^1$ converge si $\beta < 1$, et diverge sinon.

    - Étude de $s \to +\infty$: $s^{-\beta}((1 + s)^\alpha - s^\alpha) = s^{\alpha - \beta}((1 + 1 / s)^\alpha - 1) \sim \alpha\, s^{\alpha - \beta - 1}$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty}$ converge si $\beta > \alpha$, et diverge sinon.

    - Conclusion: quand $\alpha < 0$, l'intégrale CVA si $\alpha < \beta < \alpha + 1$, et DV sinon; quand $\alpha > 0$, l'intégrale CVA si $\alpha < \beta < 1$, et DV sinon.

12. La singularité: $+\infty$. L'intégrale CVA quand $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$, ou $\alpha = \beta = 1$ et $\gamma > 1$, et DV sinon.

13. $\int_0^{+\infty} \sin t^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sin u \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}$ semi-converge par la question 10.

Exercice 4. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, T périodique. Montrer que $\int_T^{+\infty} t^{-1} f(t) \, \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_0^T f(t) \, \mathrm{d}t = 0$.

Solution. On note la fonction $F(x) = \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t \in C^1(\mathbb{R}_{\geq 0})$. Si $F(T) = 0$, alors F est aussi T-périodique, donc $\sup_{x \geq T} |F(x)| = \sup_{x \in [0, T]} |F(x)| < +\infty$. Par le critère de Dirichlet, $\int_T^{+\infty} t^{-1} f(t) \, \mathrm{d}t$ CV.

Si $\int_T^{+\infty} t^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t$ CV, alors la série $\sum_{n=1}^\infty a_n$ définie par $a_n = \int_{nT}^{(n+1)T} t^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Remarquons que par la T-périodicité de la fonction f, on a

$$a_n = \int_0^T \frac{1}{nT+t} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{nT}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^T \left(\frac{1}{nT} - \frac{1}{nT+t}\right) f(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus, pour tout réel $t \in [0,T]$, on a

$$0 \leq \frac{1}{nT} - \frac{1}{nT+t} \leq \frac{1}{T}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

On note $m := T^{-1}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ et $M := T^{-1}\int_0^T |f(t)|\,\mathrm{d}t$, alors

$$\left|a_n - \frac{1}{nT}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^T \left(\frac{1}{nT} - \frac{1}{nT+t}\right)|f(t)|\,\mathrm{d}t \leq M\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \tag{1}$$

Du coup, pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, prendre $\sum_{n=1}^N$ sur les inégalités (1), on a

$$\left|\sum_{n=1}^N a_n - m\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}\right| \leq M\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \leq M$$

Alors

$$\left|\sum_{n=1}^N a_n\right| \geq -M + |m|\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$$

On déduit que $m = 0$ du fait que la série $\sum_n a_n$ converge et la série à TG positifs $\sum_n 1/n$ diverge.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante et $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} x\,f(x) = 0$.

Solution. Tout d'abord, d'autant que la fonction f est décroissante, $f(x) \geq \int_y^{y+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout réels $y \geq x > 0$. Prenons $y \to +\infty$, par la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, on a $f(x) \geq 0$. Alors $0 \leq x\,f(x) \leq 2\int_{x/2}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout réel $x > 0$. Prenons $x \to +\infty$, on déduit le résultat.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes deux fois différentiable, et la dérivée seconde $f'' : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ est Riemann-intégrable sur tous les intervaux fermés $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$. Si les intégrales $\int_0^{+\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty} |f''(x)|^2\,\mathrm{d}x$ convergent, on va montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x$ converge.

1. Sans perte de généralité, on peut supposer que la fonction f est à valeurs réels. Pourquoi?

2. En utilisant l'inégalité $2\,|f(x)\;f''(x)| \leq |f(x)|^2 + |f''(x)|^2$, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(x)\;f''(x)|\,\mathrm{d}x$ converge. On note $M := |f(0)\;f'(0)| + \int_0^{+\infty} |f(x)\;f''(x)|\,\mathrm{d}x$.

3. Afin de prouver que $\int_0^{+\infty} |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x$ converge, il suffit de montrer que $\int_0^E |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^E (f'(x))^2\,\mathrm{d}x \leq M$ pour tout réel $E \geq 0$. On montre par l'absurde. Sinon, il existe $E \geq 0$, tel que $\int_0^E (f'(x))^2 > M$. Montrer que pour tout réel $x \geq E$, on a $f(x)\;f'(x) > 0$. [Indication: considérer la formule de Newton-Leibniz: $f(x)\;f'(x) - f(0)\;f'(0) = \int_0^x (f(t)\;f''(t) + (f'(t))^2)\,\mathrm{d}t$]

4. En déduire que la fonction $g(x) = (f(x))^2$ est strictement croissante sur $[E, +\infty[$. Montrer que $\int_0^{+\infty} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x$ diverge. Conclure.