TD3 Supplément

Exercice 1. (Fausses intégrales généralisées)

1. Soient $a<b$ deux réels, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée qui est intégrable (au sens de Riemann) sur $[c,b]$ pour tout réel c tel que $a<c\leq b$. Prenons $M:=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$. Fixons un positif $\varepsilon>0$ assez petit.

    i. Montrer qu'il existe deux fonctions en escalier φ_1,φ_2 sur $[a+(4\,M)^{-1}\varepsilon,b]\to\mathbb{R}$, telles que $\varphi_1(x)\leq f(x)\leq\varphi_2(x)$ pour tout $x\in[a+(4\,M)^{-1}\varepsilon,b]$, et que $\int_{a+(4M)^{-1}\varepsilon}^{b}(\varphi_1(x)-\varphi_2(x))\,\mathrm{d}x<\varepsilon/2$.

    ii. En déduire que la fonction f est intégrable sur $[a,b]$. [Indication: choisissons deux fonctions $\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2$ en escalier sur $[a,b]$ telles que $\tilde{\varphi}_1\leq f\leq\tilde{\varphi}_2$, $\int_a^b(\varphi_2-\varphi_1)<\varepsilon$ et que $\tilde{\varphi}_i=\varphi_i$ sur l'intervalle $[a+(4\,M)^{-1}\varepsilon,b]$.]

2. Soient $a<b$ deux réels, $f:]a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée qui est intégrable sur $[c,b]$ pour tout réel c tel que $a<c\leq b$. Définissons une famille de fonctions $(g_\theta)_{\theta\in\mathbb{R}}$ par $g_\theta(a)=\theta$ et $g_\theta(x)=f(x)$ pour tout $x\in]a,b]$. Montrer que $\int_a^b g_\theta(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$. [Cela explique pourquoi l'intégrale $\int_a^b f$ est appelée une «fausse» intégrale généralisée.]

3. Montrer que $\int_0^1\sin(1/x)\,\mathrm{d}x$ est une fausse intégrale généralisée.

Exercice 2. Soit $f:\mathbb{R}_{\geq0}\to\mathbb{R}$ une fonction réelle. Supposons que $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon>0$, il existe un positif $S\geq0$ tel que pour tout réels $s,t>S$, l'intégrale $|\int_s^t f(x)\,\mathrm{d}x|<\varepsilon$.

2. Supposons que la fonction f est périodique de période $T>0$, c'est-à-dire, pour tout $x\in\mathbb{R}_{\geq0}$, on a $f(x+T)=f(x)$.

    i. Soit a,b deux positifs. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\int_{a+nT}^{b+nT}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. En déduire que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$.

    ii. Si la fonction f est continue en $x_0\in\mathbb{R}_{\geq0}$. Montrer que $f(x_0)=0$. [Indication: considérons $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et la dérivée $F'(x_0)$.] En déduire que si la fonction f est continue, alors $f(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}_{\geq0}$.