Sorbonne Université, année universitaire 2019-2020
Séries numériques et séries de fonctions (LU2MA250)

TD 4 : Convergence uniforme - Corrigé succinct

Exercice 1 (La fonction exponentielle)**.**

Justifier soigneusement que la fonction $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $(x \in \mathbb{R})$ est l'*unique* solution de l'équation différentielle de y suivante :

$$(*) \begin{cases} y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est continuellement dérivable (i.e. } C^1) ; \\ y'(x) = y(x) \ (x \in \mathbb{R}) ; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

En notation usuelle, $E(x) = \exp(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Et si on définit $e = \exp(1)$, on aura $e^x = \exp(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

[On pourra commencer par montrer que la série définissant $E(x)$ converge uniformément sur $[-M, M]$ pour tout réel positif M. Pour l'unicité de solution de l'équation $(*)$, si y est une solution de $(*)$, on pourra calculer d'abord $\frac{d}{dx}(E(x)^{-1}y(x))$.]

En suivant la première indication dans le crochet, $E(x)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme la terme-par-terme dérivation de la série $E(x)$ est encore $E(x)$, $E'(x) = E(x)$ partout. L'unicité de solution de $(*)$ s'obtient de la deuxième indication dans le crochet car d'après $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(E(x)^{-1}) = -E'(x)E(x)^{-2} = -E(x)^{-1}$ on aura $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(E(x)^{-1}y(x)) = 0$. Enfin $1 = \ln(e)$ par la définition de e et puis $e^x = \exp(x\ln(e)) = \exp(x)$.

Exercice 2 (Exemples de suites de fonctions)**.**

Pour chaque choix ci-dessous de fonctions f_n $(n \in \mathbb{N}^*)$, déterminer si possible la limite f de la suite de fonctions $(f_n)_n$ au sens de convergence simple (donc $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ pour chaque x), étudier si la convergence $f_n \to f$ est uniforme, puis étudier la continuité de f, enfin déterminer si $f_n' \to f'$:

a. $f_n :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{\ln x}{n} \quad (x \in]0, +\infty[, \ n \in \mathbb{N}^*).$
La limite $f = 0$ dans ce cas, la convergence $f_n \to f$ n'est pas uniforme sur $]0, +\infty[$ car $\sup_{x>0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>0} \dfrac{|\ln x|}{n} = +\infty$ pour tout n. Cependant $f_n \to f$ uniformément sur $[\delta, +\infty[$ pour tout $\delta > 0$. De même $f_n'(x) = 1/(nx) \to f' = 0$ uniformément sur $[\delta, +\infty[$ mais non uniformément sur $]0, +\infty[$.

b. $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n} \quad (x \in \mathbb{R}, \ n \in \mathbb{N}^*).$
Cette fois $f_n \to f \equiv 0$ uniformément sur $\mathbb{R}$ (en effet $|f_n(x)| \leq 1/n$ pour tout n). Or $f_n'(x) = \cos(nx)$ ne tend pas vers $f'(x) = 0$ quand $n \to \infty$.

c. $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \;\; (x \in \mathbb{R},\; n \in \mathbb{N}^*)$.

On montre d'abord que pour tout réel $M > 0$, $f_n \to f$ uniformément sur $[-M, M]$. Soit donc $M > 0$. Le développement limité de $\ln(1+x)$ autour de $x = 0$ nous dit qu'il existe un réel $C > 0$ et un $N \in \mathbb{N}^*$ tels que pour $r_n(x)$ définie par $\ln(1+\frac{x}{n}) = \frac{x}{n} + r_n(x)$, pour $|x| \leq M$ et pour $n \geq N$ on ait $|r_n(x)| \leq C/n^2$ ou bien $|nr_n(x)| \leq C/n$. On observe alors que $f_n(x) = \exp(n\ln(1+\frac{x}{n})) = \exp(x + nr_n(x))$, cela nous donne déjà que $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = e^x$ pour $|x| \leq M$ (convergence simple). Pour aboutir à la convergence uniforme sur $[-M, M]$, on observe aussi que $|e^y - 1| \leq 2|y|$ pour $|y| \leq 1$ (démonstration par déssiner le graphe de la fonction $y \mapsto e^y - 1$) ; puis pour $|x| \leq M$ et pour $n \geq \max\{N, C\}$, on a $|nr_n(x)| \leq C/n \leq 1$ et donc $|f_n(x) - f(x)| = e^x|e^{nr_n(x)} - 1| \leq e^M \cdot 2|nr_n(x)| \leq e^M \cdot 2C/n$; comme $e^M \cdot 2C/n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, on peut conclure que $f_n \to f$ uniformément sur $[-M, M]$.

Par contre, la convergence $f_n \to f = \exp$ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$: vu que $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (Ex. 1), pour tout polynôme $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ on a $|\exp(x)/P(x)| \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$. Comme chaque $f_n(x)$ est elle-même un polynôme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $|f_n(x) - f(x)| \geq f_n(x)(|\exp(x)/f_n(x)| - 1) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$, ainsi la convergence $f_n \to f$ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Enfin, comme $f_n'(x) = (1 + \frac{x}{n})^{n-1} = f_n(x)/(1+\frac{x}{n})$, on a $f_n' \to f' = \exp$ (uniformément sur les intervalles fermés et bornés, mais non uniformément sur $\mathbb{R}$).

d. $f_n : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; f_n(x) = \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) e^{-n/x^2} \;\; (-\pi/2 \leq x \leq \pi/2,\; n \in \mathbb{N}^*)$.

On remarque d'abord que f_n se prolonge continuellement en 0 via $f_n(0) = 0$. Donc la limite $f = 0$. La convergence $f_n \to f$ est uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: comme $\tan(x + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ et comme $\sin(x) \sim x$ autour de $x = 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que $|\tan(x + \frac{\pi}{2})| \leq \frac{2}{|x|}$ pour tout $|x| < \delta$, puis d'après $\exp(|y|) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|y|^k}{k!} \geq |y|$ (cf. Ex. 1) on aura pour $|x| < \delta$ que $|f_n(x)| \leq \frac{2}{|x|}(\frac{n}{x^2})^{-1} < \frac{2\delta}{n}$; d'autre part, pour $\delta \leq |x| \leq \pi/2$ on a $|f_n(x)| \leq |\tan(\delta + \frac{\pi}{2})| e^{-n/(\pi/2)^2}$; ainsi $\sup_{|x| \leq \pi/2} |f_n(x)| \leq \max\{\frac{2\delta}{n}, |\tan(\delta + \frac{\pi}{2})| e^{-n/(\pi/2)^2}\} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, d'où $f_n \to f$ uniformément sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Par un argument similaire, on peut aussi montrer que $f_n' \to f'$ uniformément.

e. $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; f_n(x) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-(nx)^2} \;\; (x \in \mathbb{R},\; n \in \mathbb{N}^*)$. Dans cet exemple, montrer aussi que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge et que sa valeur ne dépend pas de n.

La fonction limite est $f = \delta_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, la « fonction δ de Dirac » définie par $\delta_0(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $\delta_0(0) = +\infty$. La convergence $f_n \to \delta_0$ est uniforme sur $\mathbb{R} \setminus]-\epsilon, \epsilon[$ pour tout $\epsilon > 0$ mais n'est pas uniforme sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. D'autre part, $f_n'(x) = -\frac{2n^3x}{\sqrt{\pi}}e^{-(nx)^2}$ converge simplement vers 0 dans $\mathbb{R}$, cependant non uniformément sur $\mathbb{R}$, car $|f_n'(\pm\frac{1}{\sqrt{2}n})| = \sqrt{\frac{2}{\pi e}}\,n^2 \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ (inspiré par résoudre l'équation $0 = f_n''(x) = -\frac{2n^3}{\sqrt{\pi}}(1-2n^2x^2)e^{-n^2x^2}$).

Enfin on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(\frac{x}{n})\,\mathrm{d}(\frac{x}{n}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x (= 1)$.

f. $f_n :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad f_n(x) = \displaystyle\int_{1/n}^{n} e^{-t}t^x\,\frac{\mathrm{d}t}{t}\ \ (x \in]0,+\infty[,\ n \in \mathbb{N}^*)$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction Gamma $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x\,\frac{\mathrm{d}t}{t}$ (donc $f(x) = \Gamma(x)$), cette convergence étant uniforme sur $[\delta, 1/\delta]$ pour tout $\delta > 0$ (estimations directes), mais n'étant pas uniforme sur $]0,+\infty[$, car : si $r_n(x) := \int_n^{+\infty} e^{-t}t^x\,\frac{\mathrm{d}t}{t}$, une intégration par partie nous donnera $r_n(x+1) = e^{-n}n^x + x\cdot r_n(x)$, on en obtient alors $|f(n+1)-f_n(n+1)| \geq r_n(n+1) \geq e^{-n}n^n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

Concernant la dérivée, on pourra justifier que $f_n'(x) = \int_{1/n}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{-t}t^{x-1})\,\mathrm{d}t = \int_{1/n}^{n} e^{-t}(\ln t)t^x\,\frac{\mathrm{d}t}{t}$ et que $f_n'(x) \to \int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)t^x\,\frac{\mathrm{d}t}{t}$ uniformément sur $\delta \leq x \leq 1/\delta$ pour tout $\delta > 0$, par conséquence on aura $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}(\ln t)t^x\,\frac{\mathrm{d}t}{t}$ pour tout $x > 0$.

Exercice 3 (Fonction zêta de Riemann)**.** [1]

Soit $\zeta :]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ $(s \in]1,+\infty[\,)$.

a. Montrer que ζ est continue et dérivable ; quelle est sa dérivée ?

[On pourra montrer que la convergence de la série définissant ζ converge uniformément sur $[t, T]$ pour tous $T > t > 1$.]
A l'aide de majoration par l'intégrale et du critère de Cauchy pour la convergence uniforme etc, on montrera que les deux séries $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ (pour $\zeta(s)$) et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^s}$ converge uniformément sur $[1+\delta, 1/\delta]$ pour tout $\delta > 0$, par conséquence $\zeta(s)$ est C^1 sur $]1,+\infty[$ avec sa dérivée $\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$.

b. Déterminer les limites $\lim\limits_{s\to 1+}\zeta(s)$ et $\lim\limits_{s\to+\infty}\zeta(s)$.

On a $\zeta(s) \xrightarrow{s\to 1+} +\infty$ car $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \geq \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \frac{1}{s-1} \xrightarrow{s\to 1+} +\infty$. De même $\zeta(s) \xrightarrow{s\to+\infty} 1$ car $0 \leq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^s} \leq \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \frac{1}{s-1} \xrightarrow{s\to+\infty} 0$.

Exercice 4 (Exemples de séries de fonctions)**.**

Cet exercice est inspiré par le CC1 de ce cours. Pour chaque série de fonctions ci-dessous,

---

[1] Cet exercice est adapté de la feuille 4 de TD du cours 2M250 de Paris 6 de l'année 2016-2017. Lien du page du cours : `https://webusers.imj-prg.fr/~gregory.ginot/2M250/` (achévé le 09/11/2019).

surtout de la forme $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, trouver son vrai domaine de définition dans $\mathbb{R}$ (i.e. l'ensemble des valuers $x \in \mathbb{R}$ telles que la série converge en x), étudier si la série converge uniformément, puis étudier sa continuité, enfin déterminer si la dérivation de la série peut passer dans la sommation, i.e. si on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$:

a. $\mathbb{R} \ni x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$ où $u_n = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

[Dans le CC1 (Ex. 1.4), est-ce que tu as réussi à prouver que $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n = 1$ et que $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$? Et le cas $x = 1$ est bien Ex. 1.4 du CC1.]

Dans l'Ex. 1.4 CC1 on a déjà dû montrer que $u_{n+1}/u_n \to 1$ lorsque $n \to +\infty$, et que $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc par le critère d'Alembert, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$ converge (simplement) si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$ diverge en $x = 1$ d'après Ex. 1.3-4 du CC1, elle diverge aussi en $x = -1$ car le terme général $u_n(-1)^n$ dans ce cas ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$ ($u_n \geq u_{n-1} \geq \cdots \geq u_1 > 0$ pour tout n).

D'autre part, il est standard de montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$ converge uniformément (et absolument) sur $[-r, r]$ pour tout $0 < r < 1$, donc cette série est une fonction continue sur $]-1, 1[$.

Or la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$ ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$, car : pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $0 < x < 1$ on a (d'après $u_n \geq u_{n-1}$ pour tout n) la minoration $\sum_{n=N}^{+\infty} u_n x^n \geq u_1 \sum_{n=N}^{+\infty} x^n = \frac{u_1 x^N}{1-x}$ pour $0 < x < 1$, puis $\sup_{|x|<1} |\sum_{n=N}^{+\infty} u_n x^n| \geq \sup_{0<x<1} \frac{u_1 x^N}{1-x} = +\infty$.

Il est aussi standard que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n x^{n-1}$, par exemple on pourra montrer ces égalités en montrant que la dernière série converge uniformément sur $[-r, r]$ pour tout $0 < r < 1$.

b. $\mathbb{R} \ni x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n^2}$.

[Les cas $x = 1$ et $x = -1$ ont été vus dans l'Ex. 2.1 du CC1.]

Dans l'Ex. 2.1 du CC1 on a vu que cette série converge en $x = 1$ et diverge en $x = -1$. La même technique employée là-bas, à priori le critère de Cauchy, nous donnera également que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n^2}$ ici converge simplement dans $]0, +\infty[$ et diverge dans $]-\infty, 0]$.

Étudier si la convergence est uniforme : comme $(1 - \frac{x}{n})^{n^2} = \exp(n^2 \ln(1 - \frac{x}{n}))$, si on écrit $\ln(1 - \frac{x}{n}) = -\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + r_n(x)$ avec $r_n(x) = O((\frac{x}{n})^3)$ (lorsque $\frac{x}{n} \to 0$), on a $(1 - \frac{x}{n})^{n^2} = \exp(-nx - \frac{x^2}{2} + n^2 r_n(x))$. Fixons maintenant un réel $M > 0$ quelconque. On peut alors préciser la notation $r_n(x) = O((\frac{x}{n})^3)$ (lorsque $\frac{x}{n} \to 0$) dans ce cas : il existe un réel $C > 0$ et un $N \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $|x| \le M$ et pour tout entier $n \ge N$ on ait $|r_n(x)| \le \frac{C}{n^3}$ ou bien $|n^2 r_n(x)| \le \frac{C}{n}$. Ainsi pour tout $|x| \le M$ et pour tout $n \ge N$ on a $0 \le (1-\frac{x}{n})^{n^2} = \exp(-\frac{x^2}{2})\exp(-nx)\exp(n^2 r_n(x)) \le Ce^{-nx}$. Comme $\sum_n e^{-nx}$ est une série convergeant uniformément sur $[\delta, M]$ pour tout $\delta > 0$, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n^2}$ l'est également. Ceci montrera également que la série de fonctions $]0,+\infty[\ni x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n^2}$ est continue.

D'autre part, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n^2}$ n'est pas uniformément convergente : pour tout $0 < x < M$ et pour tout entier $n \ge N$ on a (notation comme dans le paragraphe précédent) $(1-\frac{x}{n})^{n^2} = \exp(-\frac{x^2}{2})\exp(-nx)\exp(n^2 r_n(x)) \ge e^{-\frac{M^2}{2}-\frac{C}{N}}e^{-nx}$, ainsi pour tout $0 < x < M$ et pour tout entier $L \ge N$ on a $\sum_{n=L}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n^2} \ge e^{-\frac{M^2}{2}-\frac{C}{N}}\sum_{n=L}^{\infty} e^{-nx} = e^{-\frac{M^2}{2}-\frac{C}{N}}\frac{e^{-Lx}}{1-e^{-x}}$, ce qui entraîne que $\sup_{x>0}\sum_{n=L}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n^2} \ge e^{-\frac{M^2}{2}-\frac{C}{N}}\sup_{0<x<M}\frac{e^{-Lx}}{1-e^{-x}} = +\infty$.

Enfin, la terme-par-terme dérivation de la série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n^2}$ est donnée par $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\frac{x}{n})^{n^2-1}$, on pourra montrer de même manière que cette dernière série est définie sur $]0,+\infty[$ et converge uniformément sur $[\delta, M]$ si $M > \delta > 0$, d'où l'égalité désirée $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n^2}$ pour tout $x > 0$.

c. $\displaystyle \mathbb{R} \ni x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n^x+1)}$.

[Dans l'Ex. 2.2 du CC1 on a essayé de déterminer la convergence simple de cette série dans l'intervalle $x > 0$.]

On a montré dans Ex. 2.2 du CC1 que cette série converge simplement dans l'intervalle $x > 0$. Pour $x \le 0$ cette série diverge car son terme général $\frac{(-1)^n}{\ln(n^x+1)}$ ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$ (en effet $|\frac{(-1)^n}{\ln(n^x+1)}| \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$).

Étudier la convergence uniforme : soit $g_n(x) = \frac{1}{\ln(n^x+1)}$ et donc la série à élaborer est $]0,+\infty[\ni x \to \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n g_n(x)$. On sait que la suite $(g_n(x))_n$ décroît et a pour limite simple 0, donc si $q > p > 0$ on aura l'estimation $|\sum_{n=p}^{q}(-1)^n g_n(x)| \le g_p(x) = \frac{1}{\ln(n^x+1)}$ $(x > 0)$. Cette dernière estimation, plus le critère de Cauchy pour la convergence uniforme, nous permet de conclure que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n^x+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n g_n(x)$ converge uniformément sur $[\delta,+\infty[$ pour tout $\delta > 0$. En particulier cette série de fonctions est continue dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

Cependant cette série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n^x+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n g_n(x)$ n'est pas converge uniformément sur $]0,+\infty[$ car le critère de Cauchy ne sera pas vérifié : en effet, compte tenu de la minoration $|\sum_{n=p}^{p+2}(-1)^n g_n(x)| \ge g_{p+2}(x) = \frac{1}{\ln((p+2)^x+1)}$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ que $\sup_{x>0}|\sum_{n=p}^{p+2}(-1)^n g_n(x)| \ge \sup_{x>0}\frac{1}{\ln((p+2)^x+1)} = \frac{1}{\ln 2}$.

Ensuite on va étudier si $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n^x+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{(-1)^n}{\ln(n^x+1)}$, i.e. déterminer si $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n g_n'(x)$ (rappelons que $g_n(x) = \frac{1}{\ln(n^x+1)}$). On a cette dernière égalité si $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n g_n'(x)$ converge uniformément sur $[\delta, 1/\delta]$ pour tout $\delta > 0$. Afin de compléter ce plan, on observe d'abord que $g_n'(x) = -\frac{n^x \ln n}{(\ln(n^x+1))^2(n^x+1)}$, donc $(-g_n')_n$ est une suite positive convergeant vers 0 simplement dans l'intervalle $x > 0$ lorsque $n \to \infty$.

Affirmation : Soit $\delta > 0$. Alors il existe un $N(\delta) \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $x \geq \delta$ la suite numérique $(-g_n'(x))_{n \geq N(\delta)}$ soit une suite décroissante.

Si on admet cette affirmation, alors comme dans notre discussion précédente, on a pour tous entiers $q > p > N(\delta)$ et pour tout $x \geq \delta (> 0)$ que $|\sum_{n=p}^{q}(-1)^n g_n'(x)| \leq -g_p'(x) \leq \frac{\ln p}{(\ln(p^\delta+1))^2} \xrightarrow{p\to\infty} 0$, d'où la convergence uniforme de $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n g_n'(x)$ sur $\delta \leq x < +\infty$ et ainsi $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n^x+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{(-1)^n}{\ln(n^x+1)}$ pour tout $x > 0$. Il reste donc de montrer l'affirmation ci-dessus.

Preuve de l'Affirmation : soit $\delta > 0$. On peux demander à priori que $N(\delta) \geq 2$. Comme $-g_n'(x) = \dfrac{n^x \ln n}{(\ln(n^x+1))^2(n^x+1)}$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}(-g_n'(x)) = \frac{-(A(n,x) - B(n,x))}{(\ln(n^x+1))^3(n^x+1)^2}$$

où

$$\begin{aligned}
A(n,x) &= 2xn^{2x-1}\ln n\,;\\
B(n,x) &= n^{x-1}x(\ln n)\ln(n^x+1) + n^{2x-1}\ln(n^x+1) + n^{x-1}\ln(n^x+1)\\
&=: B_1(n,x) + B_2(n,x) + B_3(n,x).
\end{aligned}$$

Il s'agit donc de trouver un $N(\delta) \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N(\delta)$ et pour tout $x \geq \delta$ on ait $A(n,x) - B(n,x) > 0$ et donc $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}(-g_n'(x)) < 0$. On construire un tel $N(\delta)$ explicitement : soit $0 < \epsilon < 1$ quelconque. En écrivant

$$\begin{aligned}
A(n,x) &= 2xn^{2x-1}\ln n\,;\\
&= \frac{1-\epsilon}{2}xn^{2x-1}\ln n + (1+\epsilon)xn^{2x-1}\ln n + \frac{1-\epsilon}{2}xn^{2x-1}\ln n\\
&=: A_1(n,x) + A_2(n,x) + A_3(n,x),
\end{aligned}$$

on a alors :

$$\begin{aligned}
A_2(n,x) - B_2(n,x) = n^{2x-1}\ln\left(\frac{n^{x(1+\epsilon)}}{n^x+1}\right) \ (x \geq \delta, n \geq N(\delta))\\
\Longleftarrow n^x > \frac{1}{n^\epsilon - 1} \ (x \geq \delta, n \geq N(\delta))\\
\Longleftarrow N(\delta)^\delta > \frac{1}{2^\epsilon - 1} \Longleftarrow N(\delta) > (2^\epsilon - 1)^{-1/\delta}\,;
\end{aligned}$$

(on fixe un $M(\epsilon) > 0$ tel que $\ln(y+1) < \frac{1-\epsilon}{2} y$ pour tout $y \geq M(\epsilon)$)

$$\begin{aligned} A_1(n,x) - B_1(n,x) = xn^{x-1} \ln n \left(\frac{1-\epsilon}{2} n^x - \ln(n^x+1) \right) &> 0 \ (x \geq \delta, n \geq N(\delta)) \\ &\Longleftarrow n^x > M(\epsilon) \ (x \geq \delta, n \geq N(\delta)) \\ &\Longleftarrow N(\delta)^\delta > M(\epsilon) \Longleftarrow N(\delta) > M(\epsilon)^{1/\delta} \ ; \end{aligned}$$

$$A_3(n,x) - B_3(n,x) = n^{x-1} \left(\frac{1-\epsilon}{2} n^x \ln(n^x) - \ln(n^x+1) \right) > 0 \ (x \geq \delta, n \geq N(\delta))$$

$$\Longleftarrow \frac{1-\epsilon}{2} n^x \ln(n^x) - \ln(2n^x) > 0 \ (x \geq \delta, n \geq N(\delta))$$

$$\Longleftarrow \frac{1-\epsilon}{4} n^x \ln(n^x) - \ln(n^x) > 0 \text{ et } \frac{1-\epsilon}{4} n^x \ln(n^x) - \ln(2) > 0 \ (x \geq \delta, n \geq N(\delta))$$

$$\Longleftarrow \frac{1-\epsilon}{4} n^x > 0 \text{ et } \frac{1-\epsilon}{4} x n^x \ln(2) - \ln(2) > 0 \ (x \geq \delta, n \geq N(\delta))$$

$$\Longleftarrow \frac{1-\epsilon}{4} N(\delta)^\delta - 1 > 0 \text{ et } \frac{1-\epsilon}{4} \delta N(\delta)^\delta - 1 > 0$$

$$\Longleftarrow \frac{1-\epsilon}{4} \delta N(\delta)^\delta - 1 > 0 \Longleftarrow N(\delta) > ((1-\epsilon)\delta/4)^{-1/\delta}.$$

Ainsi il suffit de choisir un $N(\delta) > \max\{(2^\epsilon - 1)^{-1/\delta}, M(\epsilon)^{1/\delta}, ((1-\epsilon)\delta/4)^{-1/\delta}\}$ (pour un $0 < \epsilon < 1$ quelconque). La preuve est donc complétée.