

TD 4 : Convergence uniforme

Exercice 1 (La fonction exponentielle).

Justifier soigneusement que la fonction $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $E(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ($x \in \mathbb{R}$)

est l'*unique* solution de l'équation différentielle de y suivante :

$$(*) \begin{cases} y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est continuellement dérivable (i.e. } C^1 \text{)} ; \\ y'(x) = y(x) \text{ (} x \in \mathbb{R} \text{)} ; \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

En notation usuelle, $E(x) = \exp(x)$ ($x \in \mathbb{R}$). Et si on définit $e = \exp(1)$, on aura $e^x = \exp(x)$ ($x \in \mathbb{R}$).

[On pourra commencer par montrer que la série définissant $E(x)$ converge uniformément sur $[-M, M]$ pour tout réel positif M . Pour l'unicité de solution de l'équation (*), si y est une solution de (*), on pourra calculer d'abord $\frac{d}{dx}(E(x)^{-1}y(x))$.]

Exercice 2 (Exemples de suites de fonctions).

Pour chaque choix ci-dessous de fonctions f_n ($n \in \mathbb{N}^*$), déterminer si possible la limite f de la suite de fonctions $(f_n)_n$ au sens de convergence simple (donc $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ pour chaque x), étudier si la convergence $f_n \rightarrow f$ est uniforme, puis étudier la continuité de f , enfin déterminer si $f'_n \rightarrow f'$:

a. $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\ln x}{n}$ ($x \in]0, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}^*$).

b. $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n}$ ($x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$).

c. $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ($x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$).

d. $f_n : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) e^{-n/x^2} & (0 < |x| \leq \pi/2, n \in \mathbb{N}^*) ; \\ 0 & (x = 0, n \in \mathbb{N}^*). \end{cases}$

e. $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-(nx)^2}$ ($x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$). Dans cet exemple, montrer aussi que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx$ converge et que sa valeur ne dépend pas de n .

f. $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_{1/n}^n e^{-tx} \frac{dt}{t}$ ($x \in]0, +\infty[$, $n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 3 (Fonction zêta de Riemann).¹

Soit $\zeta :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ($s \in]1, +\infty[$).

a. Montrer que ζ est continue et dérivable ; quelle est sa dérivée ?

[On pourra montrer que la convergence de la série définissant ζ converge uniformément sur $[t, T]$ pour tous $T > t > 1$.]

b. Déterminer les limites $\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s)$ et $\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s)$.

Exercice 4 (Exemples de séries de fonctions).

Cet exercice est inspiré par le CC1 de ce cours. Pour chaque série de fonctions ci-dessous,

surtout de la forme $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, trouver son vrai domaine de définition dans \mathbb{R} (i.e.

l'ensemble des valeurs $x \in \mathbb{R}$ telles que la série converge en x), étudier si la série converge uniformément, puis étudier sa continuité, enfin déterminer si la dérivation de la série

peut passer dans la sommation, i.e. si on a $\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$:

a. $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n$ où $u_n = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

[Dans le CC1 (Ex. 1.4), est-ce que tu as réussi à prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}/u_n = 1$ et que $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$? Et le cas $x = 1$ est bien Ex. 1.4 du CC1.]

b. $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n^2}$.

[Les cas $x = 1$ et $x = -1$ ont été vus dans l'Ex. 2.1 du CC1.]

c. $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n^x + 1)}$.

[Dans l'Ex. 2.2 du CC1 on a essayé de déterminer la convergence simple de cette série dans l'intervalle $x > 0$.]

¹Cet exercice est adapté de la feuille 4 de TD du cours 2M250 de Paris 6 de l'année 2016-2017. Lien du page du cours : <https://webusers.imj-prg.fr/~gregory.ginot/2M250/> (achévé le 09/11/2019).