Les rémarques de TD4

Exercice 1. Étudier la convergence des suites $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(f_n' : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $f_n(x) = (1 + x/n)^n$.

Réponse du Exercice 1.

- La convergence simple: Fixons un réel $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > |x|$, on a $1 + x/n > 0$, donc

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(n\left(\frac{x}{n} + O_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(x + O_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \mathrm{e}^x \exp\left(O_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \mathrm{e}^x\left(1 + O_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \mathrm{e}^x =: f(x)
\end{aligned}$$

- La convergence uniforme: Fixons un entier $n \in \mathbb{N}$, nous étudions $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$. Nous remarquons que $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}(1 + x/n)^n = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty}(f_n(x) - f(x)) = -\infty$, qui entraine que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$. Donc la suite ne converge pas uniformément.

- La convergence localement uniforme (un essai par définition): Pour tout intervalle I borné et fermé, posons $g_n(x) := f_n(x) - f(x)$. Remarquons que la fonction g_n est continue. Il reste d'étudier la convergence de la suite $\sup_{x\in I} |g_n(x)| = \max_{x\in I} |g_n(x)|$.

  Nous pouvons le résoudre au cas particulier: $I \subseteq \mathbb{R}_{\geq -1}$. Afin d'étudier le maximum de $|g_n|$ sur I, nous étudions la dérivée $g_n'(x) = (1 + x/n)^{n-1} - \mathrm{e}^x$. Nous remarquons que $g_n'(0) = 0$. Nous réécrivons $g_n'(x) = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{-x}(1 + x/n)^{n-1} - 1)$ et prenons $h_n(x) = -x + (n-1)\ln(1 + x/n)$ pour $x \geq -1$, alors $g_n'(x) = \mathrm{e}^x(\exp(h_n(x)) - 1)$. On a

$$\begin{aligned}
h_n'(x) &= -1 + (n-1)\frac{1/n}{1 + x/n} \\
&= -1 + \frac{n-1}{n+x} \\
&= -\frac{1+x}{n+x}
\end{aligned}$$

Donc $h_n'(-1)=0$ et $h_n'(x)<0$ quand $x>-1$, cela implique que la fonction h_n est strictement croissante sur $]-n,-1]$, et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_{\geq -1}$. Notons que $h_n(0)=0$, alors $h_n(x)>0$ quand $-1\leq x<0$ et $h_n(x)<0$ quand $x>0$. Cela implique que $g_n'(x)>0$ quand $-1\leq x<0$ et $g_n'(x)<0$ quand $x>0$, donc la fonction g_n est strictement croissante sur $[-1,0]$, et strictement décroissante sur $[0,1]$. D'autant que $g_n(0)=0$, on a $\max_{x\in I}|g_n(x)|=\max\{-g_n(l),-g_n(r)\}$ où $I=[l,r]$. Cela implique que la suite f_n converge uniformément sur I, pour tout $I\subseteq\mathbb{R}_{\geq -1}$.

Quand on passe la preuve au-dessus au cas général, il est difficile de déterminer la valeur de $\max_{x\in I}|g_n(x)|$, donc nous avons à la résoudre par d'autres méthodes.

La méthode de résoudre cet problème est d'étudier le développement limité plus soigneusement. On rappelle que quand on calcule la limite simple, on n'a pas de contrôle des constants dans les notations $O_{n\to\infty}$. Le truc, c'est d'épuisser soigneusement les constants quand nous faisons le dévéloppement limité. Nous rappelons que

Théorème 1. **(Taylor-Lagrange)** *Soient $I\subseteq\mathbb{R}$ un intervalle contenant $x_0\in\mathbb{R}$ et $f\in C^\infty(I)$ une fonction lisse, alors pour tout entier $d\in\mathbb{N}$, on a*

$$f(x)=\left(\sum_{k=0}^{d} f^{(k)}(x_0)\,\frac{(x-x_0)^k}{k!}\right)+r_{d+1}(x)$$

où $r_{d+1}\in C^\infty(I)$ est une fonction lisse telle que

$$|r_{d+1}(x)|\leq\frac{|x-x_0|^{d+1}}{(d+1)!}\sup_{t\in J_x}|f^{(d+1)}(t)|$$

pour tout $x\in I$, où $J_x=[\min(x_0,x),\max(x_0,x)]$.

Corollaire 2. *Soient $I\subseteq\mathbb{R}$ un intervalle contenant $x_0\in\mathbb{R}$ et $f\in C^\infty(I)$ une fonction lisse, alors pour tout entier $d\in\mathbb{N}$ et un intervalle $K\subseteq I$ fermé et borné, il existe un constant $C_{K,d}\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que pour tout $x\in K$, on ait*

$$f(x)=\left(\sum_{k=0}^{d} f^{(k)}(x_0)\,\frac{(x-x_0)^k}{k!}\right)+c_{d+1}(x)\,(x-x_0)^{d+1}$$

où $c_{d+1}\in C^\infty(I)$ est une fonction lisse telle que $|c_{d+1}(x)|\leq C_{K,d}$ pour tout $x\in K$.

Démonstration. Posons $r_{d+1}(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(x_0)\,(x-x_0)^k/k!$ comme en Théorème 1, alors $r_{d+1}^{(k)}(x_0)=0$ pour $k=0,1,\cdots,d$. Nous choisissons $c_{d+1}(x)=(x-x_0)^{-(d+1)}\,r_{d+1}(x)$ quand $x\neq x_0$ et $c_{d+1}(x_0)=f^{(d+1)}(x_0)/(d+1)!$. Nous pouvons vérifier que la fonction c_{d+1} est lisse. D'autant que K est fermé et borné et que la fonction $f^{(d+1)}$ est continue sur K, on peut choisir $C_{K,d}=\max_{t\in K}|f^{(d+1)}(t)|/(d+1)!\in\mathbb{R}_{\geq 0}$. □

Remarque 3. En effet, on peut choisir directement $C_{K,d} = \max_{t\in K} |c_{d+1}(t)|$ parce que la fonction c_{d+1} est continue, mais nous précisons $C_{K,d} = \max_{t\in K} |f^{(d+1)}(t)| / (d+1)!$ pour la commodité des lecteurs.

Réponse du Exercice 1. Nous étudions la convergence localement uniforme de la série $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par le Corollaire 2. Les lecteurs sont recommendés de comparer avec la réponse pour la limite simple.

Pour tout intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ fermé et borné. Prenons $M := \max_{t\in I} |t|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > 2M$, on a $1 + x/n \in [1/2, 3/2]$, alors

$$
\begin{aligned}
f_n(x) &= \exp\Big(n \ln\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)\Big) \\
&= \exp\Big(n\left(\frac{x}{n} + c_2\Big(\frac{x}{n}\Big)\left(\frac{x}{n}\right)^2\right)\Big) \\
&= \exp\left(x + \frac{x^2}{n} c_2\Big(\frac{x}{n}\Big)\right) \\
&= \exp(x) \exp\left(\frac{x^2}{n} c_2\Big(\frac{x}{n}\Big)\right) \\
&= \exp(x)\left(1 + \frac{x^2}{n} c_2\Big(\frac{x}{n}\Big) c_1\Big(\frac{x^2}{n} c_2\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big)\right)
\end{aligned}
$$

où $\ln(1+t) = t + c_2(t)\, t^2$ et $\exp(t) = 1 + t\, c_1(t)$ comme en Corollaire 2, alors il existe un constant $C_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que $|c_2(t)| \leq C_1$ pour tout réel $t \in [-1/2, 1/2]$. Alors

$$
\left|\frac{x^2}{n} c_2\Big(\frac{x}{n}\Big)\right| \leq \left|x^2 c_2\Big(\frac{x}{n}\Big)\right| \leq C_1 M^2
$$

pour tout $x \in I$. Nous utilisons encore une fois Corollaire 2 en déduisant qu'il existe un constant $C_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tel que $|c_1(t)| \leq C_2$ pour tout réel $t \in [-C_1 M^2, C_1 M^2]$. Par conséquent,

$$
\left|c_1\Big(\frac{x^2}{n} c_2\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big)\right| \leq C_2
$$

pour tout $x \in I$. Alors on a

$$
\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \exp(x)\left|\frac{x^2}{n}\right| \left|c_2\Big(\frac{x}{n}\Big)\right| \left|c_1\Big(\frac{x^2}{n} c_2\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big)\right| \\
&\leq \exp(x)\frac{M^2}{n} C_1 C_2 \\
&\leq \exp(M)\frac{M^2}{n} C_1 C_2
\end{aligned}
$$

Cela implique que $\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq n^{-1} \exp(M)\, M^2\, C_1\, C_2 \to 0$ quand $n \to +\infty$, donc $f_n \rightrightarrows f$ sur I.

Problème. Utiliser la même méthode pour étudier la convergence localement uniforme de la série des dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$.