Théorème d'Olivier

Théorème 1. (Olivier) *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante dont la série converge. Alors $\lim_{n\to\infty} n\, a_n = 0$.*

Démonstration. Tout d'abord, on remarque que

Problème 1. Montrer que les termes généraux $a_n \geq 0$.

Pour montrer que $\lim_{n\to\infty} n\, a_n = 0$, il suffit de trouver un constant positif $C \in \mathbb{R}_{>0}$, tel que la proposition au-dessous est valable:

Proposition 2. *Pour tout positif $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, on ait*

$$n\, a_n \leq C\, \varepsilon \tag{1}$$

Problème 2. Pourquoi c'est suffisant?

On fixe un positif $\varepsilon > 0$. Par critère de Cauchy, il existe un entier $M \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ tel que pour tout entiers n, m $(n \geq m \geq M)$, on ait

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \leq \varepsilon \tag{2}$$

Problème 3. En utilisant l'inégalité (2), le fait que la série (a_n) soit décroissante, montrer qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier n, on ait

$$n\, a_n \leq \frac{n}{n - m + 1}\, \varepsilon \tag{3}$$

pour tout entier $m \in [M, n] \cap \mathbb{N}$.

La stratégie est au-dessous: On choisit un entier $N \geq M$, tel que l'on puisse épuiser l'inégalité (3) pour majorer $n\, a_n$ pour tout $n \geq N$. Pour cela, on remarque que, en effet, il suffit de prendre $m = M$ pour l'épuiser:

Problème 4. On fixe deux entiers $M \leq n$. Montrer que l'inégalité (3) est valable pour tout entier $m \in [M, n] \cap \mathbb{N}$ si et seulement si

$$n\, a_n \leq \frac{n}{n - M + 1}\, \varepsilon \tag{4}$$

[Indication: la fonction $f(x)=n/(n-x+1)$ est décroissante sur $[M,n]$.]

De la même manière, remarquons que la fonction $g_M(x)=x/(x-M+1)=1-(M-1)/(x-M+1)$ est décroissante sur $[N,+\infty[$ si $N\geq M$, on déduit que

Proposition 3. *Pour tout positif $\varepsilon>0$, il existe un entier $M\in\mathbb{N}_{\geq 2}$ tel que pour tout entier $N\geq M$, l'inégalité*

$$n\,a_n\leq g_M(N)\,\varepsilon=\left(1-\frac{M-1}{N-M+1}\right)\varepsilon \tag{5}$$

est valable pour tout entier $n\geq N$.

De plus, en utilisant le fait que g_M est décroissante et que $\lim_{N\to\infty} g_M(N)=1$, on conclut que

Problème 5. La proposition 2 est valable pour tout constant positif $C>1$. □

Remarque. Le théorème d'Olivier est assez difficile. Pourtant, la technique pour épuiser l'inégalité (3) et en déduire l'inégalité (5) est importante.