Théorème de Taylor

Soient $a \in \mathbb{R}$ un réel, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ un entier positif et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui est dérivable n fois en a. Notons

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

appelé le reste d'ordre n de la formule de Taylor de la fonction f en a. Nous allons rappeler une preuve du théorème de Taylor-Young

Théorème 1. (Taylor-Young) *Sous l'hypothèse au-dessus, on a* $\lim_{x \to a} (x-a)^{-n} r_n(x) = 0$.

De plus, soient I un intervalle (ouvert) contenant a et $x \in I \setminus \{a\}$. Supposons que f est de plus dérivable n fois sur I, la n-ème dérivée $f^{(n)}$ est continue sur l'intervalle fermé $[\min(a,x), \max(a,x)]$ et dérivative sur l'intervalle ouvert $]\min(a,x), \max(a,x)[$, alors

Théorème 2. (Taylor-Cauchy) *Il existe un réel* $\xi \in]\min(a,x), \max(a,x)[$ *tel que*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n (x-a)$$

et

Théorème 3. (Taylor-Lagrange) *Il existe un réel* $\xi \in]\min(a,x), \max(a,x)[$ *tel que*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Supposons que de plus f est $(n+1)$-fois dérivable sur I est que $f^{(n+1)}$ est Riemann-intégrable sur l'intervalle fermé $[\min(a,x), \max(a,x)]$, alors

Théorème 4. (Taylor-Laplace) *On a l'égalité*

$$r_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n \, \mathrm{d}t$$

Dans cet ensemble des exercices, on va démontrer Théorème 1, ensuite Théorème 4. Comme des corollaires, on va déduire les versions un peu plus faibles de Théorème 2 et Théorème 3, c'est-à-dire, sous l'hypothèse de Théorème 4. Ce sont pratiquement suffisants. Nous allons déduire quelques convergences des séries de Taylor.

Exercice 1.

1. Montrer que $r_n^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, \cdots, n$.

2. En utilisant successivement la règle (généralisée) de l'Hôpital, déduire le théorème 1.

Exercice 2. On fixe un réel $x \in I$ tel que $x \neq a$. Supposons que de plus f est $(n+1)$-fois dérivable sur I et que $f^{(n+1)}$ est Riemann-intégrable sur l'intervalle fermé $[\min(a, x), \max(a, x)]$,

1. Montrer que $r_n^{(n+1)} = f^{(n+1)}$ sur l'intervalle fermé $[\min(a, x), \max(a, x)]$.

2. Montrer que $r_n(x) = \int_0^{x-a} r_n'(x-t)\,\mathrm{d}t$. En déduire que $r_n(x) = \int_0^{x-a} r_n''(x-t)\,t\,\mathrm{d}t$ si $n > 1$ par l'intégration par partie.

3. Montrer que pour tout entier positif $k \leq n$, on a

$$r_n(x) = \int_0^{x-a} \frac{r_n^{(k+1)}(x-t)}{k!}\,t^k\,\mathrm{d}t$$

   En déduire Théorème 4.

4. En utilisant le théorème de la moyenne pour des intégrales, montrer qu'il existe un réel $\xi \in]\min(a, x), \max(a, x)[$ tel que

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$$

   et qu'il existe un réel $\xi' \in]\min(a, x), \max(a, x)[$ tel que

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi')}{n!}\,(x-\xi')^n\,(x-a)$$

Exercice 3. Soient f une fonction lisse (c'est-à-dire, indéfiniment dérivable) sur un intervalle fermé I et $a \in I$. Notons que $M_n := \sup_{x \in I} |f^{(n)}(x)|$. Supposons que $\alpha = \limsup_{n \to \infty} (M_n/n!)^{1/n} < +\infty$.

1. En utilisant le critère de Cauchy (de racine), montrer que la série de Taylor

$$\sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n$$

   converge absolument pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| < 1/\alpha$.

2. En utilisant Théorème 3, montrer que pour tout $x \in I$ tel que $|x-a| < 1/\alpha$, la série de Taylor converge à $f(x)$.

3. En utilisant Théorème 3, montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\,x^k/k$.

4. (Plus dur) En utilisant Théorème 2, montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\,x^k/k$.