Nom:

Prénom:

Numéro d'étudiant(e):

LU2MA220 2020-2021 CC8

Résumé

Durée: 10 minutes

Les résultats doivent être justifiés avec soin. Si vous faites appel à un théorème du cours, il doit être énoncé avec précision. Aucun document n'est autorisé.

Question 1. Soit $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

1. Montrer que $(S^1, \cdot)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to S^1, t \mapsto \mathrm{e}^{2\pi i t}$.

   a. Montrer que $f : (\mathbb{R}, +) \to (S^1, \cdot)$ est un morphisme de groupes. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

   b. En énonçant un théorème dans le polycopié avec précision, montrer que le groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe $(S^1, \cdot)$.

Réponse.

1. $1 \in (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ est l'élément neutre, $|1| = 1 \Longrightarrow 1 \in S^1$. Pour tout $u, v \in S^1$, on a $|u v^{-1}| = |u|\,|v|^{-1} = 1$. Donc $S^1 \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est un sous-groupe.

2. $f(t) = \mathrm{e}^{2\pi i t}$

   a. Pour tout $s, t \in \mathbb{R}$, on a $f(s+t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(s+t)} = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} s}\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t} = f(s)\, f(t)$, donc f est un morphisme de groupes. $\mathrm{Ker}(f) = \{t \in \mathbb{R} \mid f(t) = 1\} = \{t \in \mathbb{R} \mid 2\pi \mathrm{i}\, t \in 2\pi \mathrm{i}\, \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$. Pour tout $z \in S^1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = z$, alors $f((2\pi)^{-1}\theta) = z$, donc f est surjectif, c'est-à-dire, $\mathrm{Im}(f) = S^1$.

   b. Par le théorème de l'homomorphisme (dont l'énoncé est omis), $\mathrm{Im}(f) \cong \mathbb{R}/\mathrm{Ker}(f)$, c'est-à-dire, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.