Nom:

Prénom:

Numéro d'étudiant(e):

LU2MA220 2020-2021 CC9

Résumé

Durée: 15 minutes

Les résultats doivent être justifiés avec soin. Si vous faites appel à un théorème du cours, il doit être énoncé avec précision. Aucun document n'est autorisé.

Question 1. On a vu dans le cours que si A est un anneau commutatif, alor il en est de même pour l'anneau de polynômes $A[T] = \{a_0 + a_1 T + \cdots + a_d T^d \mid d \geq 0, a_i \in A\}$ en une variable à coefficients dans A. Posons $B := \mathbb{C}[T]$.

1. L'anneau B est-il un corps?

2. Déterminer si les sous-ensembles $R_1, R_2 \subseteq B$ sont des sous-anneaux de B:

   a. $R_1 := \{a_0 + a_1 T + \cdots + a_d T^d \mid a_0 \in \mathbb{Z}, a_{i>0} \in \mathbb{R}\}$, c'est-à-dire, le sous-ensemble des polynômes $a_0 + a_1 T + \cdots + a_d T^d$ dont le coefficient $a_0 \in \mathbb{Z}$ et les autres coefficients $a_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

   b. $R_2 := \{a_0 + a_1 T + \cdots + a_d T^d \mid a_0 \in \mathbb{R}, a_{i>0} \in \mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire, le sous-ensemble des polynômes $a_0 + a_1 T + \cdots + a_d T^d$ dont le coefficient $a_0 \in \mathbb{R}$ et les autres coefficients $a_i \in \mathbb{Z}$ pour tout $i \in \mathbb{N}_{>0}$.

Réponse.

1. Non. Il suffit de montrer que $T \in \mathbb{C}[T] \setminus \{0\}$ n'est pas inversible. En effet, pour tout $f \in \mathbb{C}[T]$, si $f \neq 0$, alors $\deg(T f(T)) = 1 + \deg f \geq 1$, donc $T f(T) \neq 1$.

2. En effet, R_1 est un sous-anneau mais R_2 n'est pas un sous-anneau.

   a. Par définition, $0, 1 \in R_1$. Pour tout $f, g \in R_1$, choisissons un entier $n > \max\{\deg f, \deg g\}$, alors on peut écrire $f(T) = \sum_{k=0}^{n} a_k T^k$ et $g(T) = \sum_{k=0}^{n} b_k T^k$ où $a_0, b_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, n$. Donc $(f - g)(T) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) T^k \in R_1$ parce que $a_0 - b_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_i - b_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, \ldots, n$, et $(f g)(T) = \sum_{k=0}^{2n} T^k \sum_{j=0}^{\min\{k,n\}} a_j b_{k-j} \in R_1$ parce que $a_0 b_0 \in \mathbb{Z}$ et pour $k > 1$, on a $\sum_{j=0}^{\min\{k,n\}} a_j b_{k-j} \in \mathbb{R}$. En conclusion, $R_1 \subseteq B$ est un sous-anneau.

   b. On trouve que $1/2, T \in R_2$ mais $(1/2)\, T \notin R_2$, donc $R_2 \subseteq B$ n'est pas un sous-anneau.