Exercices supplémentaires 1

Exercice 1. (Sur les formes linéaires)

1. Soient E un k-espace vectoriel de dimension finie et $F\subseteq E$ un sous-espace vectoriel. Montrer que pour toute forme linéaire $f\in F^*$, il existe une forme linéaire $g\in E^*$, appelée «un prolongement de f en une forme linéaire sur E», telle que $g_{|F}=f$, c'est-à-dire, pour tout $x\in F$, on ait $g(x)=f(x)$. Quand le prolongement est-il unique?

2. Soient E,F deux k-espaces vectoriels de dimension finie et $T:E\to F$ une application linéaire. Rappelons que la transposée ${}^tT:F^*\to E^*$ est une application linéaire définie par $f\mapsto f\circ T$. Montrer que $\mathrm{Im}(T)=(\mathrm{Ker}({}^tT))^\circ$. [Indication: pour montrer que $(\mathrm{Ker}({}^tT))^\circ\subseteq \mathrm{Im}(T)$, il suffit de montrer que pour tout $y\in F\setminus \mathrm{Im}(T)$, il existe une forme linéaire $f\in \mathrm{Ker}({}^tT)$ telle que $f(y)\neq 0$. Utiliser le résultat de la première question pour en construire une.]

Solution.

1. Prenons un sous-espace supplémentaire G du sous-espace $F\subseteq E$, donc $E=F\oplus G$. Considérons la forme linéaire $g:E\to k, x\oplus y\mapsto f(x)$ où $x\in F$ et $y\in G$. Alors $g_{|F}=f$.

   C'est unique si et seulement si $F=E$. En effet, on a vu que l'application linéaire $\varphi:E^*\to F^*, g\mapsto g_{|F}$ est surjective, donc φ est injective si et seulement si $\dim(E^*)=\dim(F^*)$ (étant donné que E,F sont de dimension finie). Remarquons que $\dim(E)=\dim(E^*)$ et $\dim(F)=\dim(F^*)$, donc l'application φ est injective si et seulement si $\dim(E)=\dim(F)$, c'est-à-dire, $E=F$ parce que F est un sous-espace vectoriel de E.

2. D'abord, pour tout $x\in E$ et tout $f\in \mathrm{Ker}({}^tT)$, on a $f(T(x))=({}^tTf)(x)\xlongequal{f\in\mathrm{Ker}({}^tT)}0$. Donc $\mathrm{Im}(T)\subseteq(\mathrm{Ker}({}^tT))^\circ$.

   En revanche, il suffit de montrer que pour tout vecteur $y\in F\setminus\mathrm{Im}(T)$, on a $y\notin \mathrm{Ker}({}^tT)^\circ$. Fixons un vecteur $y\in F\setminus \mathrm{Im}(T)$. On va chercher une forme linéaire $f\in\mathrm{Ker}({}^tT)$ telle que $f(y)\neq 0$. Remarquons que $\mathrm{Im}(T)\subseteq F$ est un sous-espace vectoriel donc $y\neq 0$. Posons $G=\mathrm{Im}(T)$ et $G'=\mathrm{Vect}(G,y)$ le sous-espace de F engendré par y et tous les vecteurs dans G. D'autant que $y\notin G$, on a $G'=G\oplus\mathrm{Vect}(y)$. Considérons la forme linéaire $g\in(G')^*$ définie par $u\oplus t\,y\mapsto t$ où $u\in G$ et $t\in k$. Par le résultat de la première question, il existe une forme linéaire $f\in F^*$ telle que $f_{|G'}=g$. Alors $f(y)=1\neq 0$ et pour tout $x\in E$, on a $({}^tTf)(x)=f(T(x))\xlongequal{f_{|\mathrm{Im}(T)}=0}0$.

Exercice 2. (Sur la réduction des colonnes) Rappel: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\subseteq\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ est le sous-ensemble de matrices inversibles. Une application $A:[0,1]\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est continue si et seulement si les coefficients $a_{i,j}:[0,1]\to\mathbb{C}$ sont continues pour $1\le i\le n$ et $1\le j\le n$, où $A(t)=(a_{i,j}(t))_{1\le i,j\le n}$ pour tout $t\in[0,1]$.

1. Montrer que pour tout $c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, il existe une application continue $f:[0,1]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ telle que $f(0)=1$ et $f(1)=c$.

2. Montrer que pour tout $c\in\mathbb{C}$, il existe une application continue $A:[0,1]\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $A(0)=I_2$ et $A(1)=\begin{pmatrix}1&c\\0&1\end{pmatrix}$.

3. Montrer qu'il existe une application continue $A:[0,1]\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $A(0)=I_2$ et $A(1)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

4. En général, soit $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Montrer qu'il existe une application continue $A:[0,1]\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A(0)=I_n$ et $A(1)=P$. [Indication: l'algorithme de réduction des colonnes nous fournit une famille $(E_1,E_2,\ldots,E_p)$ de matrices telle que $PE_1\cdots E_p=I_n$. Pour chaque matrice E_k, chercher une application continue $B_k:[0,1]\to\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B_k(0)=I_n$ et $B_k(1)=E_k^{-1}$.]

Solution.

1. Écrivons $c=r\exp(i\,\theta)$ où $r\in\mathbb{R}_{>0}$. Alors on prend $f:[0,1]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}, t\mapsto(1+(t-1)\,r)\exp(i\,t\,\theta)$.

2. Considérons l'application $[0,1] \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t\,c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Considérons l'application $[0,1] \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), t \mapsto A(t)$ où

$$A(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(4\,t\,\pi\,i) \end{pmatrix} & t \in [0, 1/4] \\ \begin{pmatrix} 1 & 4\,t-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & t \in [1/4, 1/2] \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4\,t-2 & 4\,t-3 \end{pmatrix} & t \in [1/2, 3/4] \\ \begin{pmatrix} 4-4\,t & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & t \in [3/4, 1] \end{cases}$$

Remarque. En effet, il s'agit d'un chemin « linéaire par morceaux»

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque. C'est important que le corps soit $\mathbb{C}$. En effet, bien que $I_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, il n'existe pas d'application continue $A: [0,1] \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $A(0) = I_2$ et $A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, sinon la fonction composée $\text{dét} \circ A: [0,1] \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est continue, mais $\text{dét}(I_2) = 1$ et $\text{dét}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$.

4. L'algorithme de réduction des colonnes nous fournit une famille $(E_1, E_2, \ldots, E_p)$ de matrices telle que $P E_1 \cdots E_p = I_n$, alors $P = E_p^{-1} \cdots E_1^{-1}$, où chaque matrice E_q^{-1} est soit de forme $\mathrm{diag}\{1, \ldots, 1, c, 1, \ldots, 1\}$, soit de forme $I_n + c\, E_{i,j}$ où $i \neq j$, soit de forme $I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ pour $i \neq j$. On peut alors choisir une application continue $B_q: [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B_q(0) = I_n$ et $B_q(1) = E_q^{-1}$ pour $q = 1, \ldots, p$ selon le cas: pour le premier cas, on utilise le résultat de la première question; pour le deuxième cas, on utilise le résultat de la deuxième question, et pour le troisième cas, on utilise le résultat de la troisième question. Posons $A(t) := B_p(t) \cdots B_1(t)$.

Exercice 3. (Trace d'après Tate, [Tat68]) Rappelons que la trace d'une matrice est la somme des éléments diagonaux, et la trace $\mathrm{Tr}_E(T)$ d'un endomorphisme linéaire T d'un espace vectoriel E de dimension finie est la trace de la matrice qui lui est associée dans une base. Dans cet exercice, on va étudier une version de trace pour les espaces vectoriels de dimension infinie.

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel et $G \subseteq E$ un sous-espace supplémentaire de F. Notons $\pi_G: E \to G$ la projection canonique associée à la décomposition $E = F \oplus G$. Soit $T: E \to E$ un endomorphisme (linéaire) tel que $T(F) \subseteq F$. Alors les applications $T_{|F}: F \to F$ et $\pi_G \circ T_{|G}: G \to G$ sont des endomorphismes. Montrer que $\mathrm{Tr}_E(T) = \mathrm{Tr}_F(T_{|F}) + \mathrm{Tr}_G(\pi_G \circ T_{|G})$.

2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $T: E \to E$ un endomorphisme nilpotent, c'est-à-dire, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n = 0$. Montrer que la trace $\mathrm{Tr}_E(T) = 0$. [Indication: commencer par montrer que $\mathrm{Ker}(T) \neq 0$ quand $E \neq 0$. Alors raisonner $\mathrm{Tr}_E(T) = 0$ par récurrence en $\dim E \in \mathbb{N}$ en utilisant le résultat de la question 1.]

   Définition. *Soit E un espace vectoriel. Un endomorphisme $T: E \to E$ est appelé «de potent fini» s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dim(\mathrm{Im}(T^n)) < \infty$. Remarquons que si E est de dimension finie, alors tout endomorphisme $T: E \to E$ est de potent fini.*

3. Soient E un espace vectoriel et $T: E \to E$ un endomorphisme de potent fini. Dans cette question, on va définir la trace $\mathrm{Tr}_E(T)$.

   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace $\mathrm{Im}(T^n) \subseteq E$ est T-invariant, c'est-à-dire, $T(\mathrm{Im}(T^n)) \subseteq \mathrm{Im}(T^n)$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier tel que $\dim \mathrm{Im}(T^n) < \infty$. Fixons un entier $m \geq n$. Montrer que $\dim \mathrm{Im}(T^m) < \infty$, alors l'endomorphisme T induit un endomorphisme $T_{|\mathrm{Im}(T^m)} : \mathrm{Im}(T^m) \to \mathrm{Im}(T^m)$. Montrer que $\mathrm{Tr}_{\mathrm{Im}(T^m)}(T_{|\mathrm{Im}(T^m)}) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{Im}(T^n)}(T_{|\mathrm{Im}(T^n)})$. [Indication: épuiser les résultats des questions 1,2 pour évaluer $\mathrm{Tr}_{\mathrm{Im}(T^n)}(T_{|\mathrm{Im}(T^n)}) - \mathrm{Tr}_{\mathrm{Im}(T^m)}(T_{|\mathrm{Im}(T^m)})$.]

Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier tel que $\dim \mathrm{Im}(T^n) < \infty$. La trace $\mathrm{Tr}_E(T)$ est définie par $\mathrm{Tr}_{\mathrm{Im}(T^n)}(T_{|\mathrm{Im}(T^n)})$ qui ne dépende pas du choix de l'entier n. En particulier, si $\dim E < \infty$, alors on peut prendre $n = 0$, donc la trace définie ici coïncide avec la définition de la trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.*

4. Soient E un k-espace vectoriel, $F \subseteq \mathrm{End}(E)$ un sous-espace vectoriel tel qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que pour toute famille $(T_1, \ldots, T_n) \in F^n$, on ait $\dim \mathrm{Im}(T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_n) < \infty$. Remarquons que tout endomorphisme $T \in F$ est de potent fini. Montrer que l'application $\mathrm{Tr}_E : F \to k, T \mapsto \mathrm{Tr}_E(T)$ est une forme linéaire. [Indication: afin de montrer que $\mathrm{Tr}_E(S+T) = \mathrm{Tr}_E(S) + \mathrm{Tr}_E(T)$ pour $S, T \in F$, notons $G := \sum_{(T_1, \ldots, T_n) \in \{S,T,S+T\}^n} \mathrm{Im}(T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_n) \subseteq E$, et il suffit de montrer que pour tout $\varphi \in \{S, T, S+T\}$, on a $\varphi(G) \subseteq G$ et $\mathrm{Tr}_E(\varphi) = \mathrm{Tr}_G(\varphi_{|G})$.]

Solution.

1. Prenons une base $\mathcal{B}_F$ de F et une base $\mathcal{B}_G$ de G. D'autant que $E = F \oplus G$, la famille $(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$ forme une base de E. Dans cette base, la matrice de l'endomorphisme s'écrit comme $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$ (en effet $A_{2,1} = 0$). On remarque que $A_{1,1}$ est la matrice associée à l'endomorphisme $T_{|F}$ dans la base $\mathcal{B}_F$ et $A_{2,2}$ est la matrice associée à l'endomorphisme $\pi_G \circ T_{|G}$ dans la base $\mathcal{B}_G$, alors $\mathrm{Tr}_E(T) = \mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A_{1,1}) + \mathrm{Tr}(A_{2,2}) = \mathrm{Tr}_F(T_{|F}) + \mathrm{Tr}_G(\pi_G \circ T_{|G})$.

2. On raisonne par récurrence en $\dim E$.

   - Tout d'abord, si $\dim E = 0$, c'est-à-dire, $E = 0$, alors par définition, $\mathrm{Tr}_E(T) = 0$.

   - On suppose que $d \in \mathbb{N}_{>0}$ et que la proposition est valide pour tout espace vectoriel E avec $\dim E < d$ et tout endomorphisme nilpotent $T : E \to E$. On va montrer que pour tout espace vectoriel E avec $\dim E = d$ et tout endomorphisme nilpotent $T : E \to E$, on a $\mathrm{Tr}_E(T) = 0$.

     On remarque que $\mathrm{Ker}(T) \neq 0$, sinon l'endomorphisme T est injectif, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme T^n est aussi injectif, et l'on prend $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n = 0$, alors l'endomorphisme $0 : E \to E$ est injectif, ce qui est absurde.

     Alors on prend un sous-espace supplémentaire F de $\mathrm{Ker}(T) \subseteq E$, et posons $\pi_F : E \to F$ la projection associée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}(T) \oplus F$. Par la question précédente, on a $\mathrm{Tr}_E(T) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{Ker}(T)}(T_{|\mathrm{Ker}(T)}) + \mathrm{Tr}_F(\pi_F \circ T_{|F}) = \mathrm{Tr}_F(\pi_F \circ T_{|F})$. Remarquons que si $T^n = 0$ alors $(\pi_F \circ T_{|F})^n = 0$, parce que pour tout $x \in E$, on a $x - \pi_F(x) \in \mathrm{Ker}(T)$ par définition de π_F, alors $T(x) = T(\pi_F(x))$, c'est-à-dire, $T = T \circ \pi_F$, et par conséquent, $(\pi_F \circ T_{|F})^n = (\pi_F \circ T^n)_{|F}$. En résumé, l'endomorphisme $\pi_F \circ T_{|F}$ est nilpotent.

     Remarquons que $\dim F = \dim E - \dim \mathrm{Ker}(T) < \dim E = d$, alors par l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{Tr}_F(\pi_F \circ T_{|F}) = 0$, donc $\mathrm{Tr}_E(T) = 0$.

3. Soient E un espace vectoriel et $T : E \to E$ un endomorphisme de potent fini.

   a. $T(\mathrm{Im}(T^n)) = T(T^n(E)) = T^n(T(E)) \subseteq T^n(E) = \mathrm{Im}(T^n)$.

   b. Remarquons que $\mathrm{Im}(T^m) \subseteq \mathrm{Im}(T^n)$ parce que $m \geq n$. On prend un sous-espace supplémentaire F de $\mathrm{Im}(T^m) \subseteq \mathrm{Im}(T^n)$ et note $\pi_F : \mathrm{Im}(T^n) \to F$ la projection associée à la décomposition $\mathrm{Im}(T^n) = \mathrm{Im}(T^m) \oplus F$. Alors $\mathrm{Tr}_{\mathrm{Im}(T^n)}(T_{|\mathrm{Im}(T^n)}) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{Im}(T^m)}(T_{|\mathrm{Im}(T^m)}) + \mathrm{Tr}_F(\pi_F \circ T_{|F})$. Il suffit de montrer que $\mathrm{Tr}_F(\pi_F \circ T_{|F}) = 0$. D'autant que le sous-espace $\mathrm{Im}(T^m) \subseteq E$ est T-invariant, $\mathrm{Im}(T^m) \subseteq \mathrm{Ker}(\pi_F \circ T_{|F})$, donc $\pi_F \circ T_{|F} \circ \pi_F = \pi_F \circ T_{|F}$, ce qui entraîne que $(\pi_F \circ T_{|F})^r = \pi_F \circ (T^r)_{|F}$ pour tout entier $r \in \mathbb{N}_{>0}$. En particulier, $(\pi_F \circ T_{|F})^m = \pi_F \circ (T^m)_{|F} \subseteq \pi_F(\mathrm{Im}(T^m)) = 0$. Par conséquent, $\mathrm{Tr}_F(\pi_F \circ T_{|F}) = 0$ par le résultat de la question 2.

4. Fixons un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que pour toute famille $(T_1, \ldots, T_n) \in F^n$, on ait $\dim \operatorname{Im}(T_1 \circ \cdots \circ T_n) < \infty$. Alors pour tout endomorphisme $T \in F$, on a $\operatorname{Tr}_E(T) = \operatorname{Tr}_{\operatorname{Im}(T^n)}(T_{|\operatorname{Im}(T^n)})$ et pour tout $c \in k \setminus \{0\}$, on a $\operatorname{Tr}_E(cT) = \operatorname{Tr}_{\operatorname{Im}(T^n)}(cT_{|\operatorname{Im}(T^n)}) = c \operatorname{Tr}_{\operatorname{Im}(T^n)}(T_{|\operatorname{Im}(T^n)}) = c \operatorname{Tr}_E(T)$. D'ailleurs, $\operatorname{Tr}_E(0\,T) = 0 = 0 \operatorname{Tr}_E(T)$.

   Il reste de montrer que pour tout $(S, T) \in F^2$, on a $\operatorname{Tr}_E(S + T) = \operatorname{Tr}_E(S) + \operatorname{Tr}_E(T)$. Considérons le sous-espace $G := \sum_{(T_1, \ldots, T_n) \in \{S, T, S+T\}^n} \operatorname{Im}(T_1 \circ \cdots \circ T_n)$, un espace vectoriel de dimension finie. Alors pour tout $\varphi \in \{S, T, S + T\}$ et toute famille $(T_1, \ldots, T_n) \in \{S, T, S + T\}^n$, on a $\varphi(\operatorname{Im}(T_1 \circ \cdots \circ T_n)) = (\varphi \circ T_1 \circ \cdots \circ T_{n-1})(\operatorname{Im}(T_n)) \subseteq \operatorname{Im}(\varphi \circ T_1 \circ \cdots \circ T_{n-1}) \subseteq G$. De plus, $\operatorname{Tr}_E(\varphi) = \operatorname{Tr}_{\operatorname{Im}(\varphi^n)}(\varphi_{|\operatorname{Im}(\varphi^n)})$ par le résultat de la question 3.b et $\operatorname{Tr}_G(\varphi_{|G}) = \operatorname{Tr}_{\operatorname{Im}(\varphi_{|G}^n)}(\varphi_{|\operatorname{Im}(\varphi_{|G}^n)}) = \operatorname{Tr}_{\operatorname{Im}(\varphi^n)}(\varphi_{|\operatorname{Im}(\varphi^n)})$ aussi par le résultat de la question 3.b. Donc $\operatorname{Tr}_E(\varphi) = \operatorname{Tr}_G(\varphi_{|G})$. Donc $\operatorname{Tr}_E(S + T) = \operatorname{Tr}_G((S + T)_{|G}) = \operatorname{Tr}_G(S_{|G}) + \operatorname{Tr}_G(T_{|G}) = \operatorname{Tr}_E(S) + \operatorname{Tr}_E(T)$.

Bibliographie

[Tat68] John Tate. Residues of differentials on curves. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série*, 1:149–159, 1968.