Exercices supplémentaires 1

Exercice 1. (Sur les formes linéaires)

1. Soient E un k-espace vectoriel de dimension finie et $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel. Montrer que pour toute forme linéaire $f \in F^*$, il existe une forme linéaire $g \in E^*$, appelée «un prolongement de f en une forme linéaire sur E», telle que $g_{|F} = f$, c'est-à-dire, pour tout $x \in F$, on ait $g(x) = f(x)$. Quand le prolongement est-il unique?

2. Soient E, F deux k-espaces vectoriels de dimension finie et $T : E \to F$ une application linéaire. Rappelons que la transposée ${}^tT : F^* \to E^*$ est une application linéaire définie par $f \mapsto f \circ T$. Montrer que $\mathrm{Im}(T) = (\mathrm{Ker}({}^tT))^\circ$. [Indication: pour montrer que $(\mathrm{Ker}({}^tT))^\circ \subseteq \mathrm{Im}(T)$, il suffit de montrer que pour tout $y \in F \setminus \mathrm{Im}(T)$, il existe une forme linéaire $f \in \mathrm{Ker}({}^tT)$ telle que $f(y) \neq 0$. Utiliser le résultat de la première question pour en construire une.]

Exercice 2. (Sur la réduction des colonnes) Rappel: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ est le sous-ensemble de matrices inversibles. Une application $A : [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est continue si et seulement si les coefficients $a_{i,j} : [0,1] \to \mathbb{C}$ sont continues pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, où $A(t) = (a_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ pour tout $t \in [0,1]$.

1. Montrer que pour tout $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, il existe une application continue $f : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = c$.

2. Montrer que pour tout $c \in \mathbb{C}$, il existe une application continue $A : [0,1] \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $A(0) = I_2$ et $A(1) = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Montrer qu'il existe une application continue $A : [0,1] \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $A(0) = I_2$ et $A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. En général, soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Montrer qu'il existe une application continue $A : [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A(0) = I_n$ et $A(1) = P$. [Indication: l'algorithme de réduction des colonnes nous fournit une famille $(E_1, E_2, \ldots, E_p)$ de matrices telle que $PE_1 \cdots E_p = I_n$. Pour chaque matrice E_k, chercher une application continue $B_k : [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B_k(0) = I_n$ et $B_k(1) = E_k^{-1}$.]

Exercice 3. (Trace d'après Tate, [Tat68]) Rappelons que la trace d'une matrice est la somme des éléments diagonaux, et la trace $\mathrm{Tr}_E(T)$ d'un endomorphisme linéaire T d'un espace vectoriel E de dimension finie est la trace de la matrice qui lui est associée dans une base. Dans cet exercice, on va étudier une version de trace pour les espaces vectoriels de dimension infinie.

1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel et $G \subseteq E$ un sous-espace supplémentaire de F. Notons $\pi_G : E \to G$ la projection canonique associée à la décomposition $E = F \oplus G$. Soit $T : E \to E$ un endomorphisme (linéaire) tel que $T(F) \subseteq F$. Alors les applications $T_{|F} : F \to F$ et $\pi_G \circ T_{|G} : G \to G$ sont des endomorphismes. Montrer que $\mathrm{Tr}_E(T) = \mathrm{Tr}_F(T_{|F}) + \mathrm{Tr}_G(\pi_G \circ T_{|G})$.

2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $T : E \to E$ un endomorphisme nilpotent, c'est-à-dire, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n = 0$. Montrer que la trace $\mathrm{Tr}_E(T) = 0$. [Indication: commencer par montrer que $\mathrm{Ker}(T) \neq 0$ quand $E \neq 0$. Alors raisonner $\mathrm{Tr}_E(T) = 0$ par récurrence en $\dim E \in \mathbb{N}$ en utilisant le résultat de la question 1.]

   Définition. *Soit E un espace vectoriel. Un endomorphisme $T : E \to E$ est appelé «de potent fini» s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dim(\mathrm{Im}(T^n)) < \infty$. Remarquons que si E est de dimension finie, alors tout endomorphisme $T : E \to E$ est de potent fini.*

3. Soient E un espace vectoriel et $T : E \to E$ un endomorphisme de potent fini. Dans cette question, on va définir la trace $\mathrm{Tr}_E(T)$.

   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace $\mathrm{Im}(T^n) \subseteq E$ est T-invariant, c'est-à-dire, $T(\mathrm{Im}(T^n)) \subseteq \mathrm{Im}(T^n)$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier tel que $\dim \operatorname{Im}(T^n) < \infty$. Fixons un entier $m \geq n$. Montrer que $\dim \operatorname{Im}(T^m) < \infty$, alors l'endomorphisme T induit un endomorphisme $T_{|\operatorname{Im}(T^m)} : \operatorname{Im}(T^m) \to \operatorname{Im}(T^m)$. Montrer que $\operatorname{Tr}_{\operatorname{Im}(T^m)}(T_{|\operatorname{Im}(T^m)}) = \operatorname{Tr}_{\operatorname{Im}(T^n)}(T_{|\operatorname{Im}(T^n)})$. [Indication: épuiser les résultats des questions 1,2 pour évaluer $\operatorname{Tr}_{\operatorname{Im}(T^n)}(T_{|\operatorname{Im}(T^n)}) - \operatorname{Tr}_{\operatorname{Im}(T^m)}(T_{|\operatorname{Im}(T^m)})$.]

Définition. *Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier tel que $\dim \operatorname{Im}(T^n) < \infty$. La trace $\operatorname{Tr}_E(T)$ est définie par $\operatorname{Tr}_{\operatorname{Im}(T^n)}(T_{|\operatorname{Im}(T^n)})$ qui ne dépende pas du choix de l'entier n. En particulier, si $\dim E < \infty$, alors on peut prendre $n = 0$, donc la trace définie ici coïncide avec la définition de la trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.*

4. Soient E un k-espace vectoriel, $F \subseteq \operatorname{End}(E)$ un sous-espace vectoriel tel qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que pour toute famille $(T_1, \ldots, T_n) \in F^n$, on ait $\dim \operatorname{Im}(T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_n) < \infty$. Remarquons que tout endomorphisme $T \in F$ est de potent fini. Montrer que l'application $\operatorname{Tr}_E : F \to k, T \mapsto \operatorname{Tr}_E(T)$ est une forme linéaire. [Indication: afin de montrer que $\operatorname{Tr}_E(S+T) = \operatorname{Tr}_E(S) + \operatorname{Tr}_E(T)$ pour $S, T \in F$, notons $G := \sum_{(T_1,\ldots,T_n) \in \{S,T,S+T\}^n} \operatorname{Im}(T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_n) \subseteq E$, et il suffit de montrer que pour tout $\varphi \in \{S, T, S+T\}$, on a $\varphi(G) \subseteq G$ et $\operatorname{Tr}_E(\varphi) = \operatorname{Tr}_G(\varphi_{|G})$.]

Bibliographie

[Tat68] John Tate. Residues of differentials on curves. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Quatrième Série*, 1:149–159, 1968.