1 Séance 25 mars 2020

Exercice 1. (TD3, Exo 4)

1. Montrer que l'application $\text{dét}: M_{n\times n}(k)\to k$ est continue où $k=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
2. Soit $A\in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$. Montrer qu'il existe une matrice $B\in M_{n\times n}(\mathbb{Z})$ t.q. $AB=BA=I_n$ ssi $\text{dét}(A)=\pm 1$.
3. Soient k un corps, $A\in M_{n\times n}(k[X])$. Montrer qu'il existe une matrice $B\in M_{n\times n}(k[X])$ t.q. $AB=BA=I_n$ ssi $\text{dét}(A)$ est un polynôme constant non-nul.

Solution 1.

1. $\text{dét}(A)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\,a_{1,\sigma(1)}\,a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}$ où $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$.
2. Si $AB=I_n$, alors $\text{dét}(A)\,\text{dét}(B)=\text{dét}(AB)=\text{dét}(I_n)=1$. Remarquons que $\text{dét}(A)\in\mathbb{Z}\Rightarrow\text{dét}(A)=\pm 1$. En revanche, si $\text{dét}(A)=\pm 1$, alors $A\,{}^t\text{cof}(A)={}^t\text{cof}(A)\,A=(\text{dét}(A))\,I_n$, donc nous posons $B=\text{dét}(A)^{-1}\,{}^t\text{cof}(A)$.
3. $\Longleftrightarrow\text{dét}(A)\mid 1$

Exercice 2. (TD4, Exo 1.a,1.b) On considère la matrice

$$A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\0&1&-2\\2&2&-3\end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.
2. Posons $\lambda=1$. Déterminer une suite croissante (c'est-à-dire, $\mathcal{B}_0\subseteq\mathcal{B}_1\subseteq\mathcal{B}_2\subseteq\cdots$) de familles $(\mathcal{B}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\mathcal{B}_k$ forme une base de $\text{Ker}(A-\lambda I_3)^k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Solution 2.

1. Par définition,

$$\begin{aligned}P_A(t) &= \begin{vmatrix}3-t&2&-2\\0&1-t&-2\\2&2&-3-t\end{vmatrix} = (3-t)\begin{vmatrix}1-t&-2\\2&-3-t\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2&-2\\1-t&-2\end{vmatrix} = (3-t)\,((1-t)\,(-3-t)+4)+2\,(-4+2\,(1-t))\\ &= (3-t)\,(1-t)\,(-3-t)+4\,(3-t)-8+4\,(1-t) = (3-t)\,(1-t)\,(-3-t)+4\,(1-t)+4\,(1-t) = (1-t)\,((3-t)\,(-3-t)+8)\\ &= (1-t)\,(t^2-1) = -(1-t)^2\,(1+t)\end{aligned}$$

   Donc les valeur propres sont $1,-1$.

2. Posons $B=A-I_3$. Tout d'abord, nous déterminons une base de $\text{Ker}(B)$.

$$\left(\frac{B}{I_3}\right)=\left(\begin{array}{ccc}2&2&-2\\0&0&-2\\2&2&-4\\\hline 1&&\\&1&\\&&1\end{array}\right)\xrightarrow[C_3\leftarrow C_3+C_1]{C_2\leftarrow C_2-C_1}\left(\begin{array}{ccc}2&0&0\\0&0&-2\\2&0&-2\\\hline 1&-1&1\\&1&\\&&1\end{array}\right)=:\left(\frac{BP}{P}\right)$$

   dont les colonnes sont échelonnées à permutation près. Donc $(-e_1+e_2)$ forme une base de $\text{Ker}(B)$. Maintenant nous déterminons une base de $\text{Ker}(B^2)$. En effet, $B^2\,P=B\,(B\,P)$.

$$B\,(B\,P)=\begin{pmatrix}2&2&-2\\0&0&-2\\2&2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&-2\\2&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\-4&0&4\\-4&0&4\end{pmatrix}$$

Ensuite, nous déterminons une base de $\mathrm{Ker}(B^2)$:

$$\left(\frac{B^2}{I_3}\right) \to \left(\frac{B^2\,P}{P}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 + C_1} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 2 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2} \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{array}\right)$$

dont les colonnes sont échelonnées, nous obtenons une base de $\mathrm{Ker}(B^2)$: $(-e_1 + e_2, 2\,e_2 + e_3)$. En effet, si nous ne touchons pas les colonnes de $\mathrm{Ker}(B)$ (ici, c'est la deuxième colonne), l'algorithme nous fournissons un sous-espace supplémentaire de $\mathrm{Ker}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(B^2)$ (ici, ce sous-espace supplémentaire est engendré par $(2\,e_2 + e_3)$.

Remarque 1. L'algorithme nous fournit des bases de $\mathrm{Ker}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(B^2) \subseteq \mathrm{Ker}(B^3) \subseteq \cdots$. A priori, nous devons calculer des sous-espaces supplémentaires. Cependant, cet algorithme nous en fournit « automatiquement» si nous ne touchons pas des colonnes de $\mathrm{Ker}(B^{k-1})$ quand nous calculons $\mathrm{Ker}(B^k)$ pour $k \in \mathbb{N}_{>0}$.

2 Séance 1 avr 2020

Exercice 3. (Hors programme)

1. Soient $E = k^n$ un k-espace vectoriel et $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_m) \in E^m$ une famille de vecteurs indépendants. L'algorithme pour compléter la famille $\mathcal{U}$ en une base $\mathcal{B}$ de E.
2. En général, soient $E = k^n$ un k-espace vectoriel, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \subseteq E$ deux familles de vecteurs. L'algorithme pour déterminer un sous-espace supplémentaire de $\mathrm{Vect}(\mathcal{U})$ dans $\mathrm{Vect}(\mathcal{V})$.

Solution 3.

1. Échelonner $(u_1, \ldots, u_m)$, on arrive à une matrice

$$(a_{i,j}) = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ * & \vdots & \vdots & \ddots \\ * & 1 & 0 & \cdots \\ * & * & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

où $\alpha(1) < \alpha(2) < \cdots < \alpha(m)$ et $a_{j,i} = 0$ pour $j < \alpha(i)$, et $a_{\alpha(i),i} = 1$. Nous complétons $\mathcal{U}$ par $(e_j)_{j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{\alpha(1), \ldots, \alpha(m)\}}$ (il s'agit des lignes sans pivot).

2. D'abord, échelonner $\mathcal{U}$. Ensuite, échelonner $\mathcal{V}$ à permutation près en conservant les colonnes de $\mathcal{U}$.

Exercice 4. (TD4, Exo 1.c) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

On est arrivé à

1. Le polynôme caractéristique $P_A(t) = -(1-t)^2\,(1+t)$, donc les valeurs propres sont ± 1.
2. $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Vect}(-e_1 + e_2)$, $\mathrm{Ker}((A - I_3)^2) = \mathrm{Vect}(-e_1 + e_2, 2\,e_2 + e_3)$.

Admettons que $e_2 + e_3$ est un vecteur propre dont la valeur propre est -1 (C'est juste de déterminer $\operatorname{Ker}(A + I_3)$). Déterminer des bases des sous-espace caractéristiques de A et en déduire une matrice de passage P et une matrice de Dunford T telles que $P^{-1} A\, P = T$.

Solution 4.

- -1: $f_1 := e_2 + e_3$
- 1: $f_2 := -e_1 + e_2$, $f_3 := 2\, e_2 + e_3$
- $P = (\; f_1 \;\; f_2 \;\; f_3 \;) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  i. On peut calculer $T = P^{-1} A\, T$ directement.

  ii. Ou nous pouvons calculer $A\, f_1$, $A\, f_2$, $A\, f_3$ par rapport à la base (f_1, f_2, f_3) (Parce que T est la matrice de l'application linéaire A par rapport à la base (f_1, f_2, f_3)). En effet, $A\, f_1 = -f_1$ (parce que f_1 est un vecteur propre dont la valeur propre est -1). $A\, f_2 = f_2$, il suffit de déterminer $A\, f_3$. Remarquons que $(A - I_3)^2 f_3 = 0 \Longrightarrow (A - I_3)\,(A\, f_3 - f_3) = 0 \Longrightarrow A\, f_3 - f_3 \in \operatorname{Ker}(A - I_3)$, donc il existe $c \in \mathbb{R}$, t.q. $A\, f_3 - f_3 = c\, f_2$ (en effet, $c = -2$). Donc

$$T = P^{-1} A\, P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 2. (Déterminer la décomposition de Dunford) Étant donné une matrice $A \in \operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})$, déterminer une matrice $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ t.q. $P^{-1} A\, P$ est une matrice de Dunford:

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(t)$ et les valeurs propres. Soit Λ l'ensemble des valeurs propres et $P_A(t) = \prod_{\lambda\in\Lambda} (\lambda - t)^{m(\lambda)}$ où $m(\lambda)$ est la multiplicité (algébrique) de la valeur propre λ.
2. Pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, déterminer successivement des bases $B_k(\lambda)$ pour $(\operatorname{Ker}(A - \lambda\, I_n)^k)_{k=1}^{m(\lambda)}$ t.q. $B_1(\lambda) \subseteq B_2(\lambda) \subseteq \cdots \subseteq B_{m(\lambda)}(\lambda)$ (que l'on a déjà discuté la dernière séance).
3. Remarquons que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \operatorname{Ker}((A - \lambda\, I_n)^{m(\lambda)})$, on écrit $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_d\}$, alors $P = (B_{m(\lambda_1)}(\lambda_1), \ldots, B_{m(\lambda_d)}(\lambda_d))$.
4. Pour déterminer $P^{-1} A\, P$, soit on le calcule directement, soit déterminer les images de $B_{m(\lambda_k)}(\lambda_k)$ pour $k = 1, \ldots, d$. Le truc est que pour tout $v \in B_j(\lambda_k)$, on a $(A - \lambda_k\, I_n)^j(v) = 0 \Longrightarrow (A - \lambda_k\, I_n)^{j-1}\,(A\, v - \lambda_k\, v) = 0 \Longrightarrow A\, v - \lambda_k\, v \in \operatorname{Ker}(A - \lambda_k\, I_n)^{j-1} = \operatorname{Vect}(B_{j-1}(\lambda_k))$ donc $A\, v - \lambda_k\, v$ est une combinaison linéaire des vecteurs dans $B_{j-1}(\lambda_k)$ dont les coefficients il suffit de déterminer.

3 Séance 22 avr 2020

Remarque 3. Calculer l'exponentielle $\exp(A)$ d'une matrice carrée A:

1. Déterminer la décomposition de Dunford A: une matrice $P \in \operatorname{GL}_n(k)$ t.q. $P^{-1} A\, P = D' + N'$ est une matrice de Dunford où $D' = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ est diagonale et $(N')^n = 0$.
2. Alors calculer $\exp(A) = P \exp(D' + N')\, P^{-1} = P \exp(D') \exp(N')\, P^{-1} = P \exp(D')\, (\sum_{k=0}^{n-1} {N'}^k / k!)\, P^{-1}$ où $\exp(D') = \operatorname{diag}(\exp(d_1), \ldots, \exp(d_n))$.

Exercice 5. (TD5, Exo 2) Calculer les exponentielles des matrices

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

[Indication: $P_A(t)=(1-t)\,(1+t)^2$, $P_B(t)=(1-t)^3$]

Solution 5.

1. Pour la matrice A:

   a. Le polynôme caractéristique

$$P_A(t) \;=\; \text{dét}\begin{pmatrix} -3-t & 4 & 0 \\ -2 & 3-t & 0 \\ 4 & -8 & -1-t \end{pmatrix} \;=\; (-1-t)\,\text{dét}\begin{pmatrix} -3-t & 4 \\ -2 & 3-t \end{pmatrix} \;=\; (-1-t)\,((-3-t)\,(3-t)+8) \;=\; (-1-t)\,(t^2-1) \;=\; (1-t)\,(1+t)^2$$

   Les valeurs propres sont ± 1.

   b. Pour la valeur propre 1, il suffit de déterminer le sous-espace propre $\text{Ker}(A-I_3)$:

   •

$$\left(\frac{A-I_3}{I_3}\right) = \left(\begin{array}{ccc} -4 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \\ \hline 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2\leftarrow C_1+C_2} \left(\begin{array}{ccc} -4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \\ \hline 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2\leftrightarrow C_3} \left(\begin{array}{ccc} -4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \\ \hline 1 & & 1 \\ & & 1 \\ & 1 & \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{C_3\leftarrow -2C_2+C_3} \left(\begin{array}{ccc} -4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ \hline 1 & & 1 \\ & & 1 \\ & 1 & -2 \end{array}\right)$$

   Donc $\text{Ker}(A-I_3)=\text{Vect}(e_1+e_2-2\,e_3)$.

   c. Pour la valeur propre -1, le sous-espace propre $\text{Ker}(A+I_3)=\text{Vect}(2\,e_1+e_2,e_3)$ donc $\dim(\text{Ker}(A+I_3))=2$. Par conséquent, le sous-espace caractéristique de la valeur propre -1 est aussi $\text{Ker}(A+I_3)$.

   Remarque 4. Soit λ une valeur propre de A dont la multiplicité algébrique est m, alors $\text{Ker}(A-\lambda\,I_n)\subseteq\text{Ker}(A-\lambda\,I_n)^2\subseteq\cdots\subseteq\text{Ker}(A-\lambda\,I_n)^m$ où $\text{Ker}(A-\lambda\,I_n)$ est le sous-espace propre et $\text{Ker}(A-\lambda\,I_n)^m$ est le sous-espace caractéristique dont la dimension est m. Si $\dim(\text{Ker}(A-\lambda\,I_n)^j)=m$, alors $\text{Ker}(A-\lambda\,I_n)^j$ est le sous-espace caractéristique. En particulier, si la multiplicité géométrique $\dim(\text{Ker}(A-\lambda\,I_n))=m$, alors $\text{Ker}(A-\lambda\,I_n)$ est le sous-espace caractéristique.

d. On prend la base « adaptée» $\mathcal{B}=(e_1+e_2-2\,e_3, 2\,e_1+e_2, e_3)$, est la matrice de A dans $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Donc la matrice de $\exp(A)$ dans $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e} & & \\ & \mathrm{e}^{-1} & \\ & & \mathrm{e}^{-1} \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\exp(A)=P\begin{pmatrix} \mathrm{e} & & \\ & \mathrm{e}^{-1} & \\ & & \mathrm{e}^{-1} \end{pmatrix}P^{-1}$$

2. Pour la matrice B, 1 est la seule valeur propre.

a. Le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(B-I_3)$:

$$\left(\frac{B-I_3}{I_e}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 3 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & -2 \\ \hline 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2\leftrightarrow C_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ \hline & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[C_3\leftarrow C_3+C_1]{C_2\leftarrow C_2-3C_1} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ \hline & 1 & \\ 1 & -3 & 1 \\ & & 1 \end{array}\right) =: \left(\frac{(B-I_3)\,P}{P}\right)$$

$$\left(\frac{(B-I_3)^2}{I_e}\right) \rightarrow \left(\frac{(B-I_3)\,(B-I_3)\,P}{P}\right)$$

Alors $\mathrm{Ker}(B-I_3)=\mathrm{Vect}(e_1-3\,e_2, e_2+e_3)$. On remarque que $\dim(B-I_3)=2$, cela implique que $\dim\mathrm{Ker}(B-I_3)^2=3$. On peut compléter $(e_1-3\,e_2, e_2+e_3)$ en une base de k^3, $\mathcal{B}:=(e_1-3\,e_2, e_2+e_3, e_3)$. La matrice de B dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & & -1 \\ & 1 & -2 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

(ici on a utilisé le fait que $(B-I_3)^2\,e_3=0 \Rightarrow (B-I_3)\,e_3 \in \mathrm{Ker}(B-I_3)=\mathrm{Vect}(e_1-3\,e_2, e_2+e_3)$)

b. La matrice de $\exp(B)$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\exp(D'+N')$ où

$$D':=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}=I_3,\, N':=\begin{pmatrix} 0 & & -1 \\ & 0 & -2 \\ & & 0 \end{pmatrix},\, P^{-1}\,B\,P=D'+N' \Rightarrow B-I_3=P N' P^{-1}$$

Alors $\exp(D'+N')=\exp(D')\,(I_3+N')=\mathrm{e}\,(I_3+N')$, cela implique que $\exp(B)=P\exp(D'+N')\,P^{-1}=P\,\mathrm{e}\,(I_3+N')\,P^{-1}=\mathrm{e}\,(I_3+PN'P^{-1})=\mathrm{e}\,(I_3+B-I_3)=\mathrm{e}\,B$.

4 Séance 29 avr 2020

Exercice 6. (TD5, Exo 1.c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un réel. Calculer l'exponentielle de la matrice $A_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ et $B_\theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$.

Solution 6.

1. Pour la matrice A_θ, les valeurs propres sont $\pm \mathrm{i}\,\theta$, et A_θ est diagonalisable. Pour la valeur propre $\mathrm{i}\,\theta$, le sous-espace propre est $\mathrm{Vect}({}^t(\mathrm{i}\,\theta, 1))$. Pour la valeur propre $-\mathrm{i}\,\theta$, le sous-espace propre est $\mathrm{Vect}({}^t(-\mathrm{i}\,\theta, 1))$. Notons que $P = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\,\theta & -\mathrm{i}\,\theta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $A_\theta = P\,\mathrm{diag}(\mathrm{i}\,\theta, -\mathrm{i}\,\theta)\,P^{-1}$ et $\exp(A_\theta) = P\,\mathrm{diag}(\exp(\mathrm{i}\,\theta), \exp(-\mathrm{i}\,\theta))\,P^{-1}$. Un calcul direct nous dirige au résultat $\exp(A_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
2. $\exp(B_\theta) = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$.

5 Séance 06 mai 2020

Exercice 7. (TD5, Exo 3) Calculer l'exponentielle de A où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

[Indication: $P_A(t) = (1-t)^2\,(2-t)^2$]

Solution 7. Il faut déterminer les sous-espaces caractéristiques.

1. Pour la valeur propre 1:
   - Déterminer $\mathrm{Ker}(A - I_4)$:

$$\left(\frac{A - I_4}{I_4}\right) = \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 2 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -2 & -1 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{array}\right) =: \left(\frac{(A - I_4)\,P}{P}\right)$$

   - Déterminer $\mathrm{Ker}(A - I_4)^2$:

$$\left(\frac{(A - I_4)^2}{I_4}\right) \to \left(\frac{(A - I_4)\,(A - I_4)\,P}{P}\right) = \left(\begin{array}{cccc} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 2 & -2 & -1 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 + 3C_3} \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ \hline 1 & -4 & -2 & -1 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & 3 & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{array}\right)$$

Remarque 5. Attention: les colonnes ne sont pas vraiment échelonnées à permutation près. Il faut faire une opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_4$ de plus. Néanmoins, cela n'affecte pas le résultat parce que C_1 et C_4 sont indépendantes.

Donc $\mathrm{Ker}(A-I_4)=\mathrm{Vect}(-e_1-e_2+e_4)$ et $\mathrm{Ker}(A-I_4)^2=\mathrm{Vect}(e_1,-e_1-e_2+e_4)$

2. Pour la valeur propre 2:
   - Déterminer $\mathrm{Ker}(A-2\,I_4)$:

$$\left(\frac{A-2\,I_4}{I_4}\right)=\left(\begin{array}{cccc} 0 & -2 & 2 & -1\\ 1 & -3 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 0 & -1\\ -1 & 3 & -3 & 1\\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ \hline 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)=:\left(\frac{(A-2\,I_4)\,P}{P}\right)$$

   - Déterminer $\mathrm{Ker}(A-2\,I_4)^2$:

$$\left(\frac{(A-2\,I_4)^2}{I_4}\right)\to\left(\frac{(A-2\,I_4)\,(A-2\,I_4)\,P}{P}\right)=\left(\begin{array}{cccc} 0 & -2 & -5 & -1\\ 0 & -3 & -8 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 8 & 2\\ \hline 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[C_3\leftarrow C_3-5C_4]{C_2\leftarrow C_2-2C_4}\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 2\\ \hline 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ -2 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow{C_3\leftarrow C_3-2C_2}\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 2\\ \hline 1 & & & \\ 2 & 1 & -2 & \\ 1 & 1 & -1 & \\ -2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

   Donc $\mathrm{Ker}(A-2\,I_4)=\mathrm{Vect}(e_1+2\,e_2+e_3-2\,e_4)$ et $\mathrm{Ker}(A-2\,I_4)^2=\mathrm{Vect}(e_1+2\,e_2+e_3-2\,e_4,-2\,e_2-e_3+e_4)$.

3. On prend $P=\ldots$, et $P^{-1}\,A\,P=\ldots$ est une matrice de Dunford.
4. Alors $\exp(A)=\ldots$

Remarque 6. Les colonnes rouges sont gardée pendant les calculs de $\mathrm{Ker}\,(A-I_4)^2$ et $\mathrm{Ker}(A-2\,I_4)^2$.

Problème 1. Calculer l'exponentielle $\exp(A)$ où

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & 1\\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. (TD4, Exo 3.a, 3.b.i, 3.b.ii) Étant donné des réels $\lambda,\mu,a,b,c\in\mathbb{R}$, on considère la matrice

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & a & b\\ & \lambda & 0 & c\\ & & \mu & 1\\ & & & \mu \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
2. Quand la matrice A est-elle une matrice de Dunford?
3. Déterminer des bases des sous-espace caractéristiques de A.
4. **(supplémentaire)** Déterminer l'exponentielle $\exp(A)$.