Nom:

Prénom:

Numéro d'étudiant(e):

LU2MA211: Contrôle continu

Résumé

Durée: 90 minutes

Les résultats doivent être justifiés avec soin. Si vous faites appel à un théorème du cours, il doit être énoncé avec précision. Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1. Soit $F:\mathbb{R}_{>0}\rightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(t):=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,x^{t-1}\sin\frac{1}{x-\alpha}\,\mathrm{d}x$$

Montrer que F est bien définie [2'], continue et dérivable [2']. [$\alpha\in\mathbb{R}_{>0}$ est une paramètre aléatoire sur Moodle]

Solution. On fixe un intervalle compact $[a,b]\subseteq\mathbb{R}_{>0}$. Pour tout $t\in[a,b]$, on a

$$\left|\mathrm{e}^{-x}\,x^{t-1}\sin\frac{1}{x-\alpha}\right| \;\leq\; \mathrm{e}^{-x}\max\{x^{a-1},x^{b-1}\}$$

p.p. $x\in\mathbb{R}_{\geq 0}$. [1']Par la critère de Riemann, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\max\{x^{a-1},x^{b-1}\}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\mathrm{e}^{-x}\,x^{a-1}\,\mathrm{d}x\\ &\leq \int_0^1 x^{a-1}\,\mathrm{d}x\\ &< +\infty\end{aligned}$$

De l'autre côté, $\lim_{x\rightarrow+\infty}\mathrm{e}^{-x/2}\,x^{b-1}=0$, donc

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\max\{x^{a-1},x^{b-1}\}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\mathrm{e}^{-x}\,x^{b-1}\,\mathrm{d}x\\ &\leq \left(\sup_{x\in[0,+\infty[}\mathrm{e}^{-t/2}\,t^{b-1}\right)\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x\\ &< +\infty\end{aligned}$$

[1'] donc la fonction $x\mapsto\mathrm{e}^{-x}\max\{x^{a-1},x^{b-1}\}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Comme la fonction $t\mapsto\mathrm{e}^{-x}\,x^{t-1}\sin(1/(x-\alpha))$ est continue sur $[a,b]$ p.p. $x\in\mathbb{R}_{\geq 0}$, la fonction F est continue sur $[a,b]$.

Pour montrer que F est dérivable sur $]a,b[$, on remarque que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{e}^{-x}\,x^{t-1}\sin\frac{1}{x-\alpha}\right)=\mathrm{e}^{-x}\ln(x)\,x^{t-1}\sin\frac{1}{x-\alpha}$$

et que pour tout $t\in[a,b]$, on a

$$\left|\mathrm{e}^{-x}\ln(x)\,x^{t-1}\sin\frac{1}{x-\alpha}\right| \;\leq\; \mathrm{e}^{-x}\,|\ln(x)|\max\{x^{a-1},x^{b-1}\}$$

p.p. $x\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ [1']. De la même manière, on peut montrer que la fonction $x\mapsto \mathrm{e}^{-x}\,|\ln(x)|\max\{x^{a-1}, x^{b-1}\}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$. On en déduit que la fonction F est dérivable [1'].

Exercice 2. Soit $\varphi:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(x):=\int_0^{+\infty}\frac{\cos^2(n\,u)\,\mathrm{d}u}{u^2+x^2}$$

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_{>0}$. [2']
2. Calculer $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$ et $\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)$. [2']

[$n\in\mathbb{N}_{>0}$ est une paramètre aléatoire sur Moodle]

Solution.

1. On fixe un intervalle compact $[a,b]\subseteq\mathbb{R}_{>0}$. Pour tout $x\in[a,b]$ et tout $u\in\mathbb{R}_{\geq 0}$, on a $0\leq (u^2+x^2)^{-1}\cos^2(n\,u)\leq\max\{u,a\}^{-2}$. Par la critère de Riemann, $\max\{u,a\}^{-2}$ est intégrable sur $[a,+\infty[$, donc aussi sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$. [1'] Comme la fonction $x\mapsto (u^2+x^2)\cos^2(n\,u)$ est continue sur $[a,b]$ pour tout $u\in\mathbb{R}_{\geq 0}$, on en déduit que φ est continue sur $[a,b]$. [1']

2. On remarque que, pour tout $u\in\mathbb{R}_{\geq 0}$, on a $\lim_{x\to+\infty}(u^2+x^2)^{-1}\cos^2(n u)=0$ et $\lim_{x\to 0^+}(u^2+x^2)^{-1}\cos^2(n\,u)=u^{-2}\cos^2(n\,u)$.

   Pour toute suite $(x_m)\subseteq\mathbb{R}_{>0}^{\mathbb{N}}$ t.q. $\lim_{m\to\infty}x_m=+\infty$. On remarque que $0\leq (u^2+x_m^2)^{-1}\cos^2(n\,u)\leq\max\{u,l\}^{-2}$ pour tout $m\in\mathbb{N}$ et tout $u\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ où $l:=\inf\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}>0$ comme $\lim_{m\to\infty}x_m=+\infty$. Comme $u\mapsto\max\{u,l\}^{-2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_{\geq 0}$, par la convergence dominée, on a

   $$\lim_{m\to\infty}\varphi(x_m)=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{\cos^2(n\,u)}{u^2+x_m^2}\,\mathrm{d}u=0$$

   Donc $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$. [1']

   Ensuite, pour toute suite $(x_m)\subseteq\mathbb{R}_{>0}^{\mathbb{N}}$ t.q. $\lim_{m\to\infty}x_m=0$, on remarque que la suite $((u^2+x_m^2)^{-1}\cos^2(n\,u))_{m\in\mathbb{N}}$ est positive et croissante. Par Beppo-Levi, on a

   $$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty}\varphi(x_m) &= \int_0^{+\infty}\lim_{m\to\infty}\frac{\cos^2(n\,u)}{u^2+x_m^2}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\cos^2(n\,u)}{u^2}\,\mathrm{d}u\\ &\geq \int_0^{\pi/4n}\frac{\cos^2(n\,u)}{u^2}\,\mathrm{d}u\\ &\geq \int_0^{\pi/4n}\frac{1/2}{u^2}\,\mathrm{d}u\\ &= +\infty\end{aligned}$$

   par la critère de Riemann. [1']

Exercice 3. Soit $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$u(x):=\int_0^{\pi}\cos(n\,\theta-x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

1. Montrer que la fonction u est bien définie et deux fois dérivable, et calculer $u'(x)$ et $u''(x)$. [2']

2. **(Difficile)** Montrer que u vérifie l'équation différentielle suivante [4']

$$x^2\,u''(x) + x\,u'(x) + (x^2 - n^2)\,u(x) = 0$$

[$n \in \mathbb{N}_{>0}$ est une paramètre aléatoire sur Moodle]

Solution.

1. Comme $|\cos(n\,\theta - x\sin\theta)| \leq 1$, la fonction u est bien définie. On remarque que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\cos(n\,\theta - x\sin\theta) &= \sin(n\,\theta - x\sin\theta)\sin\theta \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos(n\,\theta - x\sin\theta) &= -\cos(n\,\theta - x\sin\theta)\sin^2\theta
\end{aligned}$$

dont les valeurs absolues sont ≤ 1, donc u est deux fois dérivable [1']. On a [1']

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \int_0^\pi \sin(n\,\theta - x\sin\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
u''(x) &= -\int_0^\pi \cos(n\,\theta - x\sin\theta)\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
x^2\,u''(x) + (x^2 - n^2)\,u(x) &= \int_0^\pi \cos(n\,\theta - x\sin\theta)\,(x^2\cos^2\theta - n^2)\,\mathrm{d}\theta \\
&= -\int_0^\pi \cos(n\,\theta - x\sin\theta)\,(n + x\cos\theta)\,(n - x\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= -\int_0^\pi (n + x\cos\theta)\,\mathrm{d}(\sin(n\,\theta - x\sin\theta)) \\
&= -(n + x\cos\theta)\sin(n\theta - x\sin\theta)|_0^\pi - x\int_0^\pi \sin(n\,\theta - x\sin\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= -x\,u'(x)
\end{aligned}$$

Exercice 4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < a < 1 < b < +\infty$, et $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On introduit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $[a, b] \to \mathbb{C}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{f(x)}{1 + x^n}$$

1. Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$. [2']

2. Supposons que $f(1) \neq 0$. Déterminer un équivalent de $\int_a^1 x^{n-1}\,f_n(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque $n \to \infty$ [Indication: considérer le changement de variable $y = x^n$]. [4']

Solution.

1. $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ pour tout $x \in [a, b]$. Comme la fonction f est continue, elle est intégrable. [1'] D'ailleurs, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \left\{\begin{smallmatrix} f(x) & x<1 \\ 0 & x>1 \end{smallmatrix}\right.$, alors par la convergence dominée, on a $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) = \int_a^1 f(x)$. [1']

2. On définit $g : [0, 1] \to \mathbb{C}$ par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < a \\ f(x) & a \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Prenons $I_n := \int_a^1 x^{n-1} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. On a

$$\begin{aligned} I_n &= \int_a^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{g(y^{1/n})}{1+y}\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

[1']Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y \in [a^n, 1]$, on a $|(1+y)^{-1} f(y^{1/n})| \leq |f(y^{1/n})| \leq \sup_{x\in[a,1]} |f(x)|$. [1'] Ensuite, pour tout $y \in]0,1[$, $\lim_{n\to\infty} y^{1/n} = 1$, alors par la continuité de f en 1, $\lim_{n\to\infty} (1+y)^{-1} g(y^{1/n})\, 1_{[a^n,1]} = (1+y)^{-1} f(1)$. Par la convergence dominée, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{g(y^{1/n})}{1+y}\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \frac{f(1)}{1+y}\,\mathrm{d}y \\ &= f(1)\ln 2 \end{aligned}$$

[1'] Par conséquent, $\int_a^1 x^{n-1} f_n(x)\,\mathrm{d}x \sim n^{-1} f(1) \ln 2$. [1']