Primitives

Référence: [Zor15, §5.7].

1 Primitives usuelles

$$
\begin{aligned}
\int x^\alpha \,\mathrm{d}x &= \frac{x^{a+1}}{\alpha+1} + C \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \ln|x| + C \qquad x \neq 0 \\
\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x &= e^x + C \\
\int \sin x \,\mathrm{d}x &= -\cos x + C \\
\int \cos x \,\mathrm{d}x &= \sin x + C \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} &= \tan x + C \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} &= -\cot x + C \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \arctan x + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm 1}} &= \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C
\end{aligned}
$$

2 Primitives de fonctions rationnelles

On peut toujours calculer la primitive d'une fonction rationnelle $P(x)/Q(x)$:

Polynômes. Soit $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$, alors

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x = C + \sum_{k=0}^n a_k \frac{a^{k+1}}{k+1}$$

$1/(x-a)$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n > 1$, alors

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln|x-a| + C, & n = 1 \\ -\frac{1}{(n-1)\,(x-a)^{n-1}}, & n > 1 \end{cases}$$

$x/(x^2+a^2)^n$. Soit $a > 0$, alors

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n} &= \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}(x^2)}{(x^2+a^2)^n} \\
&= \begin{cases} \frac{\ln(x^2+a^2)}{2}, & n = 1 \\ -\frac{1}{(n-1)\,(x^2+a^2)^{n-1}}, & n > 2 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$1/(x^2+a^2)$. Soit $a>0$, alors

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} &= \int \frac{\mathrm{d}(x/a)}{(x/a)^2+1}\\ &= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C\end{aligned}$$

$1/(x^2+a^2)^n$. Soient $a>0$ et $n>0$. Le but est de calculer

$$I_n := \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}$$

C'est un peu plus difficile. Par IPP,

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2\,n\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}}\\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2\,n\int \frac{((x^2+a^2)-a^2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n+1}}\\ &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2\,n\,(I_n-a^2\,I_{n+1})\end{aligned}$$

Donc

$$I_{n+1}=\frac{x}{2\,n\,a^2\,(x^2+a^2)^n}+\frac{2\,n-1}{2\,n\,a^2}\,I_n$$

On a vu que $I_1=a^{-1}\arctan(a^{-1}\,x)$, alors on peut calculer $(I_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ par récurrence (pas de formule explicite).

Cas général. On admet le théorème suivant:

Théorème 1. (Décomposition en éléments simples) *Soit $Q(x)=a\,(x-r_1)^{e_1}\cdots(x-r_\ell)^{e_\ell}\,(x^2+b_1\,x+c_1)^{f_1}\cdots(x^2+b_m\,x+c_m)^{f_m}$ est la factorisation en $\mathbb{R}$-polynômes irréductibles (donc $b_i^2-4\,c_i<0$). Alors pour tout polynôme $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ t.q. $\deg P<\deg Q$, $P(x)/Q(x)$ est une combinaison linéaire de $1/(x-r_i)^e$, $1/(x^2+b_j\,x+c_j)^f$ et $x/(x^2+b_k\,x+c_k)^g$ où $i=1,2,\ldots,\ell$, $j=1,2,\ldots,m$, $e=1,2,\ldots,e_i$, $f=1,2,\ldots,f_j$ et $g=1,2,\ldots,f_k$.*

Donc $\int P(x)\,\mathrm{d}x/Q(x)$ est une combinaison linéaire de cas particuliers au-dessus. En particulier, quand $e_1=\cdots=e_\ell=1$ et $m=0$, c'est-à-dire, $Q(x)=a\,(x-r_1)\cdots(x-r_\ell)$, alors pour tout polynôme $P(x)\in\mathbb{R}[x]$ t.q. $\deg P<\ell$, il existe $a_1,\ldots,a_\ell$ t.q.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_1}{x-r_1}+\cdots+\frac{a_\ell}{x-r_\ell}$$

Dans ce cas, on peut déterminer $a_i=\lim_{x\to r_i}(x-r_i)\,P(x)/Q(x)=P(r_i)/Q_i(r_i)$ où $Q_i(x)=Q(x)/(x-r_i)$ est un polynôme.

Exemple 2. Écrivons

$$\frac{2\,x^2+5\,x+5}{(x-1)\,(x+1)\,(x+2)}=\frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{x+1}+\frac{a_3}{x+2},$$

alors $a_1=\frac{2\,x^2+5\,x+5}{(x+1)\,(x+2)}\Big|_{x=1}=2$, $a_2=\frac{2\,x^2+5\,x+5}{(x-1)\,(x+2)}\Big|_{x=-1}=-1$ et $a_3=\frac{2\,x^2+5\,x+5}{(x-1)\,(x+1)}\Big|_{x=2}=1$, donc

$$\frac{2\,x^2+5\,x+5}{(x-1)\,(x+1)\,(x+2)}=\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$$

et

$$\int \frac{2\,x^2+5\,x+5}{(x-1)\,(x+1)\,(x+2)}\,\mathrm{d}x=2\ln|x-1|-\ln|x+1|+\ln|x+2|+C$$

3 Primitives de fonctions trigonométrique

On peut toujours calculer $\int R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ par le changement de variable $t = \tan(\theta/2)$, mais en général, les calculs va être durs. Il est souvent possible de simplifier les calculs. Soient $R \in \mathbb{R}(x, y)$ une fonction rationnelles en deux variables et $T \in \mathbb{R}(t)$ une fonction rationnelle.

$R(\cos^2\theta, \sin^2\theta)$ ou $T(\tan\theta)$. On fait $t = \tan\theta$, alors $\mathrm{d}\theta = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\cos^2\theta = \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{1}{1+t^2}$ et $\sin^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{t}{1+t^2}$, alors

$$\int R(\cos^2\theta, \sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int R\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}\right)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

et

$$\int T(\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int T(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$

$R(\cos^2\theta, \sin\theta)\cos\theta$. On a

$$\int R(\cos^2\theta, \sin\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int R(1-\sin^2\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}(\sin\theta)$$

$R(\cos\theta, \sin^2\theta)\sin\theta$. On a

$$\int R(\cos\theta, \sin^2\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\int R(\cos\theta, 1-\cos^2\theta)\,\mathrm{d}(\cos\theta)$$

$R(\cos\theta, \sin\theta)$. Si les trucs au-dessous ne marche pas, alors on fait $t = \tan(\theta/2)$, donc $\mathrm{d}\theta = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$, $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin\theta = \frac{2\,t}{1+t^2}$, donc

$$\int R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2\,t}{1+t^2}\right)\frac{2\,t\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Cela se peut être assez compliqué.

On peut aussi évaluer $\int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right)\mathrm{d}x = -a\int R(a\cos\theta, a\sin\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$ pour $a > 0$.

Bibliographie

[Zor15] Vladimir A. Zorich. *Mathematical analysis. I*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, Second edition, 2015. Translated from the 6th corrected Russian edition, Part I, 2012 by Roger Cooke, With Appendices A–F and new problems translated by Octavio Paniagua T.