Exercices supplémentaires

Exercice 1. (Tribu de Borel) Dans cet exercice, on va montrer soigneusement l'existence de la *tribu de Borel*, la plus petite tribut $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$.

1. Soit E un ensemble.

   a. Soit $\mathcal{T}$ un ensemble de tribus sur E. Montrer que l'intersection $\bigcap_{\mathcal{A}\in\mathcal{T}} A$ est une tribu sur E.

   b. Soit $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(E)$ un ensemble de parties de E. Posons $\mathcal{T}:=\{\text{tribu } \mathcal{A} \mid \mathcal{F}\subseteq\mathcal{A}\}$ l'ensemble de tribus sur E contenant $\mathcal{F}$. Montrer que $T\neq\varnothing$, et l'intersection $\bigcap_{\mathcal{A}\in\mathcal{T}} A$ appartient à $\mathcal{T}$ et c'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{F}$.

2. En déduire l'existence de la tribu de Borel.

   Remarque 1. On peut définir la tribu de Borel $\mathcal{B}_E$ sur tous les espaces topologique E.

Exercice 2. (Applications boréliennes) On dit que un sous-ensemble $B\subseteq\mathbb{R}^d$ est *borélien* si $B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$.

Définition 2. *Une application $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d'}$ est dite* borélienne *si pour tout ouvert $U\subseteq\mathbb{R}^{d'}$, on a $f^{-1}(U)\subseteq\mathbb{R}^d$ appartient à la tribu de Borel.*

1. Montrer que tout sous-ensemble borélien $B\subseteq\mathbb{R}^d$ est mesurable par définition. En déduire que toute fonction $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ borélienne est mesurable.

2. Montrer que toute application continue $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d'}$ est borélienne.

3. Soit $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d'}$ une application borélienne. Le but de ce sous-exercice est de montrer que

   Lemme 3. *Pour tout sous-ensemble borélien $B\subseteq\mathbb{R}^{d'}$, le sous-ensemble $f^{-1}(B)\subseteq\mathbb{R}^d$ l'est aussi (cf. la définition d'application continue).*

   Posons $\mathcal{B}':=\{B\subseteq\mathbb{R}^{d'} \mid f^{-1}(B)\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}\}$.

   a. Montrer que pour tout ouvert $U\subseteq\mathbb{R}^{d'}$, on a $U\in\mathcal{B}'$.

   b. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une tribu sur $\mathbb{R}^{d'}$.

   c. En déduire que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{d'}}\subseteq\mathcal{B}'$ par la définition de la tribu de Borel. Conclure.

4. Montrer que pour toute fonction mesurable $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ et tout sous-ensemble borélien $B\subseteq\mathbb{R}$, le sous-ensemble $f^{-1}(B)\subseteq\mathbb{R}^d$ est mesurable [Indication: comme la preuve de Lemme 3, $\mathcal{B}':=\{B\subseteq\mathbb{R} \mid f^{-1}(B)\subseteq\mathbb{R}^d \text{ est mesurable}\}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$].

5. En déduire que, pour toute application borélienne $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d'}$ et toute fonction mesurable $g:\mathbb{R}^{d'}\to\mathbb{R}$, la composée $g\circ f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ est mesurable.

Exercice 3. (Ensemble de Cantor) Considérons l'ensemble $E=\{\sum_{j=0}^{\infty} a_j\,3^{-j} \mid (a_j)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}\}\subseteq\mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de montrer que $\lambda(E)=0$ et que E est infini non dénombrable, et d'étudier une généralisation.

Soit $\mathcal{F}\subseteq\mathbb{R}$ l'ensemble de tous les fermés qui s'écrivent comme une réunion finie disjointe d'intervalles fermés bornés. Considérons l'application $T:\mathcal{F}\to\mathcal{F}, \bigsqcup_{j=1}^m [a_j,b_j]\mapsto\bigsqcup_{j=1}^m \left(\left[a_j,\frac{2\,a_j+b_j}{3}\right]\sqcup\left[\frac{a_j+2\,b_j}{3},b_j\right]\right)$.

1. Montrer que pour tout $F\in\mathcal{F}$, on a $\lambda(F)<+\infty$.

2. Déterminer $T([0,1])$, $T^2([0,1])$ et $T^3([0,1])$, où $T^m:=\underbrace{T\circ T\circ\cdots\circ T}_{m}$ pour tout $m\in\mathbb{N}$ ($T^0:=\mathrm{id}$).

3. Montrer que pour tout $F\in\mathcal{F}$, on a $T(F)\subseteq F$ et $\lambda(T(F))=\frac{2}{3}\,\lambda(F)$.

4. Montrer que $E=\bigcap_{n=0}^{\infty} T^n([0,1])$, et en déduire que $\lambda(E)=0$.

5. On rappelle que

   Théorème 4. (Lebesgue) *Une fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si et seulement si f est bornée et presque partout continue.*

   Montrer que la fonction indicatrice $1_E:[0,1]\to\mathbb{R}$ est Riemann-intégrable.

6. Considérons l'application $T_\alpha:\mathcal{F}\to\mathcal{F}, \bigsqcup_{j=1}^m [a_j,b_j]\mapsto\bigsqcup_{j=1}^m \left(\left[a_j,\frac{(1+\alpha)\,a_j+(1-\alpha)\,b_j}{2}\right]\sqcup\left[\frac{(1-\alpha)\,a_j+(1+\alpha)\,b_j}{2},b_j\right]\right)$ pour tout $\alpha\in\,]0,1[$.

   a. Montrer que pour tout $\alpha\in\,]0,1[$ et $F\in\mathcal{F}$, on a $T_\alpha(F)\subseteq F$ et $\lambda(T_\alpha(F))=(1-\alpha)\,\lambda(F)$.

b. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ une suite de réels dans $]0,1[$. Montrer que $\lambda(\bigcap_{n=0}^{\infty} T_{\alpha_n} \circ T_{\alpha_{n-1}} \circ \cdots \circ T_{\alpha_0}([0,1])) = \prod_{n=0}^{\infty}(1-\alpha_n)$.

c. Trouver une CNS t.q. la fonction indicatrice $1_{\bigcap_{n=0}^{\infty} T_{\alpha_n} \circ \cdots \circ T_{\alpha_0}([0,1])}$ soit Riemann-intégrable.

Exercice 4. (Lemme de Fatou) Soient $E \subseteq \mathbb{R}^d$ une partie mesurable, $(f_n : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}_+)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables et $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable t.q. $f_n(x) \to f(x)$ p.p. $x \in E$. En utilisant le théorème de Beppo-Levi, montrer que $\int_E f \le \lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} \int_E f_n$.

Exercice 5. (Théorème de différentiation) On rappelle que

Théorème 5. *Soit $f \in C^0([a,b])$ une fonction continue. Alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $]a,b[$ dont la dérivée est f.*

On va étudier ses généralisations.

Définition 6. *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ une fonction localement intégrable. La* moyenne *sur un ensemble borné mesurable E est donné par* $\mathrm{Avg}_E(f) := (\lambda(E))^{-1} \int_E f$.

Le but de cet exercice est de montrer que

Théorème 7. (Lebesgue) *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Alors on a*

$$\lim_{r\to 0^+} \mathrm{Avg}_{B(x,r)}(f) = f(x)$$

p.p. $x \in \mathbb{R}^d$, où $B(x,r)$ est la boule ouverte $\{y \in \mathbb{R}^d \mid d(x,y) < r\}$.

1. Montrer que pour toute fonction continue $f \in C(\mathbb{R}^d)$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a $\lim_{r\to 0^+} \mathrm{Avg}_{B(x,r)}(f) = f(x)$.
2. En utilisant la formule de changement de variables, montrer que $\lambda(B(x,r)) = r^d \lambda(B(0,1))$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $r \in \mathbb{R}_{>0}$.
3. Soit $\mathcal{B}$ un ensemble fini de boules dans $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire, $\mathcal{B}$ est une partie finie de $\{B(x,r) \mid x \in \mathbb{R}^d, r \in \mathbb{R}_{>0}\}$. Le but de ce sous-exercice est de montrer que

   Lemme 8. (Vitali) *Il existe une partie $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ de boules disjointes t.q.*

   $$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subseteq \bigcup_{B(x,r)\in\mathcal{B}'} B(x, 3\,r)$$

   Écrivons $\mathcal{B} = \{B(x_1,r_1), B(x_2,r_2), \ldots, B(x_n,r_n)\}$ t.q. $r_1 \ge r_2 \ge \cdots \ge r_n$. On execute l'algorithme suivant:

   Algorithme 1

   $\mathcal{B}' \leftarrow \varnothing$
   Pour i de 1 jusqu'à n avec un pas de 1
       Si $\forall C \in \mathcal{B}' : C \cap B(x_i,r_i) = \varnothing$
           $\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}' \cup C$
       Fin si
   Fin pour

   a. Montrer que pour tout $B(x_i,r_i) \notin \mathcal{B}'$, il existe $j < i$ t.q. $B(x_i,r_i) \subseteq B(x_j, 3\,r_j)$.

   b. En déduire Lemme 8.

4. Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Le but de cet exercice est d'étudier la fonction maximale Mf de Hardy-Littlewood (version centrée)

   $$(Mf)(x) := \sup_{r>0} \mathrm{Avg}_{B(x,r)}(|f|) = \sup_{r>0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f|$$

   pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

   a. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la partie $\{Mf > \alpha\} \subseteq \mathbb{R}^d$ est ouverte.

   b. On fixe $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ et une partie compacte $K \subseteq \{Mf > \alpha\}$.

      i. Montrer qu'il existe un ensemble fini $\mathcal{B}$ de boules t.q. $K \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B$, et pour tout $B \in \mathcal{B}$, on a $\int_B |f| > \alpha\,\lambda(B)$.

      ii. En utilisant Lemme 8, montrer qu'il existe une partie $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ de boules disjointes, t.q. $\lambda(K) \le 3^n \sum_{B\in\mathcal{B}'} \lambda(B)$.

      iii. En déduire que $\lambda(K) \le 3^n\,\alpha^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |f|$.

   c. En utilisant la subdivision dyadique, montre qu'il existe une suite croissante (K_n) de parties compactes de $\{Mf > \alpha\}$, t.q. $\lim_{n\to\infty} \lambda(K_n) = \lambda(\{Mf > \alpha\})$. En déduire que $\lambda(\{Mf > \alpha\}) \le 3^n\,\alpha^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |f|$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$.

5. Fixons $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$. On admet qu'il existe une fonction $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\int_{\mathbb{R}^d} |f - \varphi| \leq \varepsilon$. Considérons

$$\mathrm{osc}_g(x) := \lim_{r \to 0^+} \sup_{r' \in]0, r[} \mathrm{Avg}_{B(x,r')}(|g|)$$

pour toute $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$.

a. Montrer que $\mathrm{osc}_f(x) \leq \mathrm{osc}_\varphi(x) + \mathrm{osc}_{f-\varphi}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

b. Montrer que $\mathrm{osc}_\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Donc $\mathrm{osc}_f(x) \leq \mathrm{osc}_{f-\varphi}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

c. Montrer que pour toute $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, on a $\mathrm{osc}_g(x) \leq Mg(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

d. Montrer que $\lambda(\{\mathrm{osc}_f(x) > \alpha\}) \leq \lambda(\{\mathrm{osc}_{f-\varphi}(x) > \alpha\}) \leq 3^n \alpha^{-1} \varepsilon$ pour tout $\alpha > 0$.

e. Montrer que $\lambda(\{\mathrm{osc}_f(x) > 0\}) = 0$. En déduire Théorème 7.