1 Séance 3 fév 2021

Définition 1. *Une* relation d'équivalence $\sim$ *sur un ensemble* E*:* $\sim \subseteq E \times E$

1. reflexivité*:* $\forall x \in E : x \sim x$
2. symétrie*:* $\forall (x, y) \in E^2$: $(x \sim y) \Rightarrow (y \sim x)$
3. transitivité*:* $\forall (x, y, z) \in E^3$: $(x \sim y) \wedge (y \sim z) \Rightarrow (x \sim z)$

Exercice. (Ch1 Ex0.1) Relation d'équivalence? Si oui, déterminer les cl d'éq & quotient

1. **$(\mathbb{R}, \leq)$.**
2. **$(\mathbb{Z}, \sim)$ où $x \sim y \Leftrightarrow |x - y| \leq 1$.**
3. $(\mathbb{Z}, \sim)$ où $x \sim y \Leftrightarrow 2 \,|\, x - y$ (pour $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \,|\, b$ si'il existe $c \in \mathbb{Z}$ t.q. $b = a\,c$)
4. **$(\{0, 1\}, \neq)$.**
5. $(\mathbb{R}^2, \sim)$ où $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x = x'$.

Solution.

1. $0 \leq 1$ mais $1 \nleq 0$, donc $\leq$ n'est pas une rel d'éq.
2. $|0 - 1| \leq 1$, $|1 - 2| \leq 2$ mais $|0 - 2| \nleq 1$, donc $|\cdot - \cdot| \leq 1$ n'est pas une relation d'éq.
3. Oui: 0 est pair; si $x - y$ est pair, alors $y - x$ l'est aussi; si $x - y, y - z$ sont pairs, alors $x - z = (x - y) + (y - z)$ est pair. Il y a 2 cls d'éq: $\{\text{pairs}\}, \{\text{impairs}\}$. L'ensemble quotient: $\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z} = \{\{\text{pairs}\}, \{\text{impairs}\}\}$
4. Ce n'est pas réflexive: $0 = 0$.
5. Oui. Les cls d'éq: $C_x := \{(x, y) \,|\, y \in \mathbb{R}\}$ « les droites verticales ». L'ensemble quotient: $\{C_x \,|\, x \in \mathbb{R}\}$. On peut identifier C_x avec $x \in \mathbb{R}$.

   Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les éléments $(x', y') \sim (x, y)$ ssi $x = x'$.

Exemple 2. Pour $\mathbb{R}$, la relation $x \sim y \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} x - y \in \mathbb{Q}$ est une relation d'éq. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $C_x := x + \mathbb{Q} = \{x + r \,|\, r \in \mathbb{Q}\}$. Il n'y pas de forme très simplifié pour cet ensemble quotient.

Définition 3. *Un ensemble* E *de foncs* $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *est dit* universellement stable *ssi*

1. **(limite d'une *suite*)** $\forall (f_n) \in E^{\mathbb{N}}\colon (\forall x \in \mathbb{R}^d\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)) \Longrightarrow f \in E$
2. **(opération d'algèbre)** $\forall f \in E, \forall g \in E\colon f + g \in E$ *et* $f g \in E$.
3. $\forall f \in E, \forall L \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)\colon f \circ L \in E$ *où* $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) := \mathbb{R}^d + \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$

   (quand $d = 1$, $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \mid f(x) = a\,x + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$, *quand* $d = 2$, $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$*)*
4. **(sup et inf *dénombrable*)** $\forall (f_n) \in E^{\mathbb{N}}\colon \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in E$ *et* $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \in E$.
5. **(division)** $\forall f \in E, \forall g \in E\colon (\forall x \in \mathbb{R}^d\colon g(x) \neq 0) \Longrightarrow f / g \in E$.

Remarque 4. (sup et inf finie) Pour $(f, g) \in E^2$: $\min(f, g) \in E$ et $\max(f, g) \in E$. En effet, prendre la suite $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ définie par $f_0 = f$ et $f_n = g$ pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$, alors $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \max\{f, g\}$ et $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n = \min\{f, g\}$.

Remarque 5. 4 implique 1: soit $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}^d$, la limite $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, par 4, on a $E \ni g_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, x \mapsto \sup_{n\geq k} f_k(x)$. Alors $f(x) = \inf_{k\in\mathbb{N}} g_k(x)$, donc $f \in E$ par 4. On a utilisé le lemme.

Lemme 6. *Soit* $(a_n) \in (\overline{\mathbb{R}}_+)^{\mathbb{N}}$ *t.q.* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *existe (dans* $\overline{\mathbb{R}}_+$*). On note* $a := \lim_n a_n$*. Alors* $a = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k} a_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} a_n$.

Démonstration. Quand $a \in \mathbb{R}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ t.q. pour tout $n \geq k$, on a $|a_n - a| < \varepsilon$, donc pour tout $k' \geq k$: $|\sup_{n\geq k'} a_n - a| \leq \varepsilon$. Donc $\lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} a_n = a$. Le cas $a = +\infty$ est similaire. $\square$

Définition 7. *Une* tribu*, ou une* σ-algèbre *sur un esemble* X*: Un ensemble* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *t.q.*

1. **(non-vide)** $\mathcal{A} \neq \varnothing$
2. **(complémentaire)** $\forall E \in \mathcal{A}\colon X \setminus E \in \mathcal{A}$.

3. **(union dénombrable)** $\forall (E_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \colon \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$.

Remarque 8. C'est important que l'union en question est dénombrable.

Exercice. (Ch1 Ex1.3) Soient E un ensemble et $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ une tribu. Montrer que

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$ et $X \in \mathcal{A}$.
2. **(union finie)** $\forall (E, F) \in \mathcal{A}^2 \colon E \cup F \in \mathcal{A}$.
3. **(intersection dénombrable)** $\forall (E_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \colon \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$.

Solution.

1. Comme $\mathcal{A} \neq \varnothing$, il existe $E \in \mathcal{A}$. Alors $X \setminus E \in \mathcal{A}$, donc $X = E \cup (X \setminus E) \in \mathcal{A} \Longrightarrow \varnothing = X \setminus X \in \mathcal{A}$.
2. On prend la suite $(E_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ donné par $E_0 := E$ et $E_n := F$ pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Alors $\mathcal{A} \ni \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n = E_0 \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = E \cup F$.
3. $(E_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n := X \setminus E_n \in \mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow X \setminus (\bigcup_{n=0}^{\infty} F_n) \in \mathcal{A}$. $X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus F_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

Remarque 9. (intersection finie) Une tribu est aussi stable par intersection finie.

Remarque 10. (complément rélatif) Pour tout $E, F \in \mathcal{A}$, on a $E \setminus F \in \mathcal{A}$. En effet, $E \setminus F = E \cap (X \setminus F)$.

Pré-définition 11. Fonctions mesurables $f \in \mathcal{M}$ *($\mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$)*, l'intégrale de Lebesgue $\int$ *sur* $\mathcal{M}^+$*:*

1. $1_U \in \mathcal{M}$ *pour tout ouvert* $U \subseteq \mathbb{R}^d$*.*
2. $C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}$*.*
3. $\mathcal{M}$ *est universellement stable.*

L'intégrale de Lebesgue $\int$ *:*

1. $\forall (f, g) \in (\mathcal{M}^+)^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0}$*:* $\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$*.*
2. *Pour* $a_1 \leq b_1, \ldots, a_d \leq b_d$*, on a* $\int 1_{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]} = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d)$*.*
3. **(Beppo-Levi = convergence croissante)** *Soit* $(f_n) \in (\mathcal{M}^+)^{\mathbb{N}}$ *une suite* ***croissante****, alors*

$$\int \lim_{n \to \infty} f_n = \lim_{n \to \infty} \int f_n$$

4. *Pour toute* $f \in \mathcal{M}^+$ *t.q.* $\int f < +\infty$*, alors pour tout* $\varepsilon > 0$*, il existe* $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_{\geq 0})$ *(*C_c *est l'ensemble de fonctions continues dont le support est compact, c'est-à-dire, il existe un ensemble* $K \subseteq_{\text{cpct}} \mathbb{R}^d$ *t.q. pour tout* $x \in \mathbb{R}^d \setminus K$*, on a* $\varphi(x) = 0$*). t.q.* $\int |f - \varphi| < \varepsilon$*.*

Remarque 12. $C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}$ est stable par somme, produit, composition à droite par des apps affines et par division, mais il n'est pas stable par limite d'une suite ou par $\sup$ ou $\inf$ (opération « analytique »).

Remarque 13. ($\mathcal{M}$ stable par $-$) Tout d'abord, les fonctions contantes sont continues, donc $\in \mathcal{M}$. En particulier, $-1 \in \mathcal{M}$. Donc pour tout $f \in \mathcal{M}$, on a $-f = (-1) f \in \mathcal{M}$ comme $\mathcal{M}$ est universellement stable. Par conséquent, pour tout $(f, g) \in \mathcal{M}^2$, $f - g \in \mathcal{M}$.

Définition 14. *Un sous-ensemble* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *est* mesurable *si* 1_E *est mesurable.*

Remarque 15. Les sous-ensembles mesurables constituent une tribu.

Remarque 16. Les ouverts $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sont mesurables. Les fermés les sont aussi.

Exercice. (Ch1 Ex1.4) Si $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est mesurable, alors les ensembles $\{f < a\}$, $\{f = a\}$ et $\{f > a\}$ le sont aussi.

Solution. Comme $\{f < a\} = \{f - a < 0\}$, et $f \in \mathcal{M} \Leftrightarrow f - a \in \mathcal{M}$, on peut supposer que $a = 0$.

$\{f > 0\}$ est mesurable. $\{f > 0\} = \{\max\{f, 0\} > 0\}$ et $\max\{f, 0\} \in \mathcal{M}$. Donc en remplaçant f par $\max\{f, 0\}$, on peut supposer que $f \geq 0$. On prend $g_n: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)/(f(x) + 1/n)$. Comme $f \in \mathcal{M}$, on a $f + 1/n \in \mathcal{M}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^d$: $f(x) + 1/n \geq 1/n > 0$, alors $g_n \in \mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ est stable par division). Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{M} \ni \lim_{n \to \infty} g_n(x) = \begin{cases} 1 & f(x) > 0 \\ 0 & f(x) = 0 \end{cases} = 1_{\{f > 0\}}$. Par définition, $\{f > 0\}$ est mesurable.

$\{f < 0\}$ est mesurable. Comme $-f \in \mathcal{M}$, on a $\{f < 0\} \Leftrightarrow \{-f > 0\}$ est mesurable.

$\{f = 0\}$ est mesurable. $\{f = 0\} = \mathbb{R}^d \setminus (\{f > 0\} \cup \{f < 0\})$.

Remarque 17. $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est mesurable, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a l'ensemble $\{a < f < b\} = \{f > a\} \cap \{f < b\}$ est mesurable. Les ensembles $\{a \leq f < b\} = \{f = a\} \cup \{a < f < b\}$, $\{a < f \leq b\}$ et $\{a \leq f \leq b\}$ le sont aussi.

Définition 18. *La* mesure de Lebesgue λ *d'un ensemble mesurable* E *est* $\int 1_E$.

Remarque 19.

1. $\int 0 = 0$: $\int 0 = \int (0\,0 + 0\,0) = 0 \int 0 + 0 \int 0 = 0$. Par conséquent, $\lambda(\varnothing) = 0$.

2. $\lambda([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d]) = (b_1 - a_1)\,(b_2 - a_2) \cdots (b_d - a_d)$ « le volumn ».

3. Soient $E \subseteq F$ deux ensembles mesurables, alors $\lambda(E) \leq \lambda(F)$. En effet, $F \setminus E$ est mesurable, et $1_F = 1_E + 1_{F \setminus E}$. Donc $\lambda(F) = \lambda(E) + \lambda(F \setminus E) \geq \lambda(E)$. En particulier, si $\lambda(E) = +\infty$, alors $\lambda(F) = +\infty$.

4. Soit $E \subseteq \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a un sous-ensemble mesurable $E_n \subseteq E$ t.q. $\lambda(E_n) \geq n$, alors $\lambda(E) = +\infty$. En effet, $\lambda(E) \geq \lambda(E_n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice. (Ch1 Ex1.5)

1. Soit (A_n) une suite croissante d'ensembles mesurables de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $\lim_{n\to\infty}\lambda(A_n)=\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)$.
2. Trouver une suite (A_n) décroissante d'ensembles mesurables de $\mathbb{R}^d$ t.q. $\lim_{n\to\infty}\lambda(A_n)\neq\lambda(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)$ [Indication: on peut prendre une suite (A_n) d'ouverts t.q. $\lambda(A_n)=+\infty$ mais $\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n=\varnothing$].
3. Quand $\lim_{n\to\infty}\lambda(A_n)=\lambda(\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n)$?

Solution.

1. Par hypothèse, $\lim_{n\to\infty}1_{A_n}=1_A$ où $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, (1_{A_n}) est croissante, alors par Beppo-Levi, $\lambda(A)=\int 1_A=\lim_{n\to\infty}\int 1_{A_n}=\lim_{n\to\infty}\lambda(A_n)$.
2. Quand $d=1$, on prend $A_n=]n,+\infty[$. Alors $A_n\supseteq[2\,n,k\,n]$ pour tout $k>2$ et $\lambda([2\,n,k\,n])=k\,n-2\,n=(k-2)\,n$. Prenons $k\to\infty$, on a $\lambda(A_n)=+\infty$. Mais $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing$ [pour d qqlc, similaire].
3. S'il existe $n\in\mathbb{N}$ t.q. $\lambda(A_n)<+\infty$, alors $\lim_{n\to\infty}\lambda(A_n)=\lambda(\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n)$. On peut supposer que $n=0$. On prend $A:=A_0$. Alors la suite $(A\setminus A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Donc $\lambda(\bigcup_{n=0}^{\infty}(A\setminus A_n))=\lim_{n\to\infty}\lambda(A\setminus A_n)$. On remarque que $\lambda(\bigcup_{n=0}^{\infty}(A\setminus A_n))\leq\lambda(A)<+\infty$ et $\bigcup_{n=0}^{\infty}(A\setminus A_n)=A\setminus\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n$, alors $\lambda(A)=\lambda(\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n)+\lambda(\bigcup_{n=0}^{\infty}(A\setminus A_n))=\lambda(\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n)+\lim_{n\to\infty}\lambda(A\setminus A_n)=\lambda(\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n)+\lim_{n\to\infty}(\lambda(A)-\lambda(A_n))$. Donc on peut conclure que $\lim_{n\to\infty}\lambda(A_n)=\lambda(\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n)$.

2 Séance 10 fév 2021

Rappelons que la mesure λ de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ satisfait

1. $\lambda(\varnothing) = 0$.
2. $\lambda([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]) = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d)$ pour $a_1, \ldots, a_d, b_1, \ldots, b_d \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i$.
3. Soient E, F deux ensembles mesurables disjoints, alors $\lambda(E \sqcup F) = \lambda(E) + \lambda(F)$.
4. **(Beppo-Levi)** Soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'ensembles mesurables dans $\mathbb{R}^d$. Posons $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Alors $\lambda(E) = \lim_{n \to \infty} \lambda(E_n)$.

Exemple 20. Déterminer $\lambda([a, b[), \lambda(]a, b])$ et $\lambda(]a, b[)$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b$.

Solution. Pour $\lambda([a, b[)$, on a $b - a = \lambda([a, b]) = \lambda([a, b[) + \lambda(\{b\}) = \lambda([a, b[)$. De la même manière, $\lambda(]a, b]) = b - a$ et $\lambda(]a, b[) = b - a$.

Alternativement, $[a, b[= \bigcup_{n > 1/(b-a), n \in \mathbb{N}} [a, b - 1/n]$, donc $\lambda([a, b[) = \lim_{n \to \infty} \lambda([a, b - 1/n]) = \lim_{n \to \infty} ((b - 1/n) - a) = b - a$.

Exemple 21. Plus généralement, déterminer $\lambda(I_1 \times \cdots \times I_d)$ où $(I_1, \ldots, I_d)$ est une suite d'intervalles en terms de $\lambda(I_j)$. Par exemple, $\lambda([0, 1] \times [0, 1[\times]2, 3] \times]3, 4[)$.

Solution. En effet, $\lambda(I_1 \times \cdots \times I_d) = \lambda(I_1)\,\lambda(I_2) \cdots \lambda(I_d)$. Pour tout intervalle I_j, il existe une suite croissante d'intervalles fermés $\left(I_j^{(n)}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ t.q. $\bigcup_{j=0}^{\infty} I_j^{(n)} = I_j$ et $\lim_{n \to \infty} \lambda\left(I_j^{(n)}\right) = \lambda(I_j)$. Dans ce cas, on peut montrer que $\bigcup_{n=0}^{\infty} I_1^{(n)} \times \cdots \times I_d^{(n)} = I_1 \times \cdots \times I_d$.

(« $\subseteq$ » est évident. En revanche, pour tout $(x_1, \ldots, x_d) \in I_1 \times \cdots \times I_d$, il existe $(r_1, \ldots, r_d) \in \mathbb{N}^d$ t.q. $x_j \in I_j^{(r_d)}$. Alors $(x_1, \ldots, x_d) \in I_1^{(r_1)} \times \cdots \times I_d^{(r_d)}$)

Alors $\lambda(I_1 \times \cdots \times I_d) = \lim_{n \to \infty} \lambda\left(I_1^{(n)}\right) \cdots \lambda\left(I_d^{(n)}\right) = \lambda(I_1) \cdots \lambda(I_d)$.

En général, λ « volume »:

Subdivision Soient $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un ouvert et $N \in \mathbb{N}$. On note $P_N(a_1, \ldots, a_d) := \left[\frac{a_1}{N}, \frac{a_1+1}{N}\right[\times \cdots \times \left[\frac{a_d}{N}, \frac{a_d+1}{N}\right[$ pour $(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$. et $Q_N := \{P_N(a_1, \ldots, a_d) \mid (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d\}$. Remarquons que Q est dénombrable (il y a une bijection $\mathbb{Z}^d \to Q_N$). Alors

1. $\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{C \in Q_N} C$ (où $\sqcup$ est la réunion disjointe).
2. $\bigsqcup_{C \in Q_N, C \subseteq U} C \subseteq U$.
3. $U \subseteq \bigsqcup_{C \in Q_N, C \cap U \neq \varnothing} C$.

Donc $\lambda(\bigsqcup_{C \in Q_N, C \subseteq U} C) \subseteq \lambda(U) \subseteq \bigsqcup_{C \in Q_N, C \cap U \neq \varnothing} C$, ou équivalemment,

$$\frac{\#\{C \in Q_N \mid C \subseteq U\}}{N^d} \leq \lambda(U) \leq \frac{\#\{C \in Q_N \mid C \cap U \neq \varnothing\}}{N^d}$$

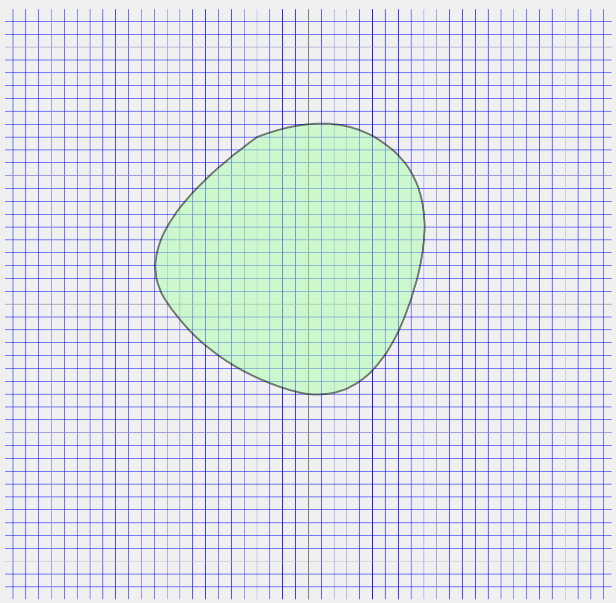
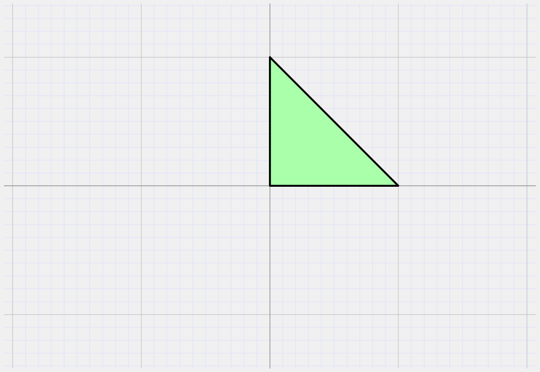


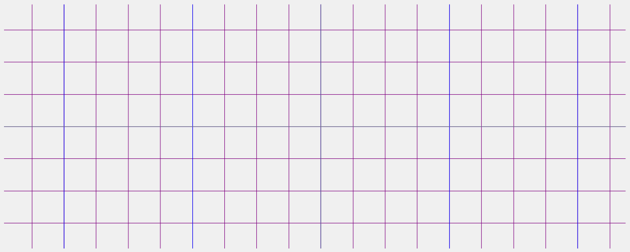
Figure 1. Subdivision de $\mathbb{R}^2$

Exemple 22. Montrer que $\lambda(T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2_{>0} \mid x + y < 1\}) = 1/2$. Plus généralement, on a $\lambda(\{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d_{>0} \mid x_1 + \cdots + x_d < 1\}) = 1/d!$.



Solution. $N \to \infty$, $\#\{C \in Q_N \mid C \subseteq T\}$ est un polynôme $N^2/2 + \cdots$ de dégré 2, $\#\{C \in Q_N \mid C \cap T \neq \varnothing\}$ l'est aussi. $\frac{\#\{C \in Q_N \mid C \subseteq T\}}{N^d} \leq \lambda(T) \leq \frac{\#\{C \in Q_N \mid C \cap T \neq \varnothing\}}{N^d}$. Prendre $N \to \infty$, on en déduit que $\lambda(T) = 1/2$.

Problème 1. (subdivision dyadique) Posons $Q_{(2)} := \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_{2^k}$ « les cubes dyadiques »



1. Montrer que pour tout $C, D \in Q_{(2)}$, on a soit $C \subseteq D$, soit $D \subseteq C$, soit $C \cap D = \varnothing$.
2. Considérons l'ensemble $E = \{C \in Q_{(2)} \mid C \subseteq U\}$. On dit qu'un objet $C \in E$ est *maximal* s'il n'y a aucun objet $D \in E$ t.q. $D \supseteq C$. On note $F \subseteq E$ le sous-ensemble des objets maximaux. Montrer que $U = \bigsqcup_{C \in F} C$.
3. Montrer que F est soit fini, soit dénombrable ($Q_{(2)}$ est une réunion d'ensembles dénombrable, donc dénombrable, et $F \subseteq Q_{(2)}$). Donc $\lambda(U) = \sum_{C \in F} \lambda(C)$ (par Beppo-Levi + linéarité).

Remarque 23. $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n)$: $1_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 1_{E_n}$ et on prend $\int_{\mathbb{R}^d}$.

Remarque 24. (Dénombrables)

1. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ sont dénombrable.

2. Soient E, F ensembles dénombrables, $E \times F$ l'est aussi.

3. Un sous-ensemble infini d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

4. Soient F un ensemble dénombrable et E un ensemble infi. S'il existe une surjection $F \twoheadrightarrow E$, alors E est dénombrable (parce que $F \twoheadrightarrow E$ admet une section $E \hookrightarrow F$ t.q. la composée $E \hookrightarrow F \twoheadrightarrow E$ est une injection, AC).

5. $\mathbb{Q}^d$ est dénombrable.

Exercice. (Ch1 Ex1.6) Considérons $(\mathbb{R}^d, \lambda)$.

1. Montrer que λ est σ-finie: il existe une suite croissante $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables t.q. $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}\colon \lambda(E_n) < +\infty$ [Indication: on peut prendre une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de cubes fermés].

2. Montrer que $\forall K \subseteq_{\text{cpct}} \mathbb{R}^d\colon \lambda(K) < +\infty$.

3. Un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de mesure finie est-il forcément borné?

4. Un ouvert dense de $\mathbb{R}^d$ peut-il être de mesure finie?

Solution.

1. $E_n = [-n, n] \times \cdots \times [-n, n]$.

2. Il existe $n \in \mathbb{N}$ t.q. $K \subseteq E_n$.

3. Non. $\bigcup_{n=2}^{\infty}]n, n + 2^{-n}[$ quand $d = 1$. Pour $d > 1$, voir la quatrième.

4. Oui. Tout d'abord, $\mathbb{Q}^d$ est dénombrable ($\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \twoheadleftarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{>0}$ est dénombrable): $\mathbb{Q}^d = \{p_1, p_2, \ldots\}$. Alors on prend $E_n := p_n +]-2^{-n}, 2^{-n}[\times \cdots \times]-2^{-n}, 2^{-n}[$ (il s'agit un cube ouvert dont le centre est p_n et le côté est 2^{1-n}, donc $\lambda(E_n) = (2^{1-n})^d$). Alors comme $\mathbb{Q}^d$ est dense, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supseteq \mathbb{Q}^d$ l'est aussi. $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{1-n})^d \leq 2$.

Remarque 25. Soient $E \subseteq \mathbb{R}^d$ et $F \subseteq \mathbb{R}^{d'}$ deux parties denses, alors $E \times F \subseteq \mathbb{R}^{d+d'}$ est dense.

Définition 26. *Soit* $E \subseteq \mathbb{R}^d$ *une partie. L'*intérieure $\mathrm{Int}(E)$ *est défini par* $\{x \in E \,|\, \exists r > 0 \colon B_r(x) \subseteq E\}$.

Corollaire 27. $\mathrm{Int}(E)$ *est ouvert.*

Corollaire 28. $\mathrm{Int}(E) = \bigcup_{U \subseteq_{\text{ouvert}} E} U$.

Définition 29. *Une partie* $E \subseteq \mathbb{R}^d$ *est dite* dense *si pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$ *et tout* $r > 0$, $E \cap B_r(x) \neq \varnothing$.

Corollaire 30. $E \subseteq \mathbb{R}^d$ *est dense ssi* $\mathrm{Int}(\mathbb{R}^d \setminus E) = \varnothing$.

Exercice. (Ch1 Ex1.7)

1. Montrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable. Est-ce vrai sans le mot « dénombrable »?
2. Que vaut la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^d$?
3. Trouver un ensemble dense $E \subseteq \mathbb{R}^d$ qui est négligeable.
4. Montrer que le complémentaire d'un ensemble négligeable est dense.
5. Montrer que le plan $\{x_3 = 0\}$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^3$.

Solution.

1. Soit (E_n) une suite d'ensembles négligeables, alors $\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = 0$. On ne peut pas enlever le mot « dénombrable »: $[0,1] = \bigcup_{x \in [0,1]} \{x\}$.
2. $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n,n]^d$ alors $\lambda(\mathbb{R}^d) = \lim_{n \to \infty} \lambda([-n,n]^d) = \lim_{n \to \infty} (2\,n)^d = +\infty$.
3. $E = \mathbb{Q}^d$: un ensemble dénombrable est négligeable.
4. Soit $E \subseteq \mathbb{R}^d$ une partie négligeable. Il suffit de montrer que $\mathrm{Int}(E) = \varnothing$. On remarque que $\mathrm{Int}(E)$ est ouvert et négligeable. Sinon, il existe un cube (non-vide) $C \subseteq \mathrm{Int}(E)$, alors $\lambda(\mathrm{Int}(E)) \geq \lambda(C) > 0$.

5. En général, $E \subseteq \mathbb{R}^d$ est négligeable ssi pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $E \cap [-N, N]^d$ est négligeable.

   Ici, $\lambda(\{x_3 = 0\} \cap [-N, N]^3) = \lambda([-N, N]^2 \times \{0\}) = 0$.

Problème 2. Existe-il un ensemble négligeable infini non dénombrable? La réponse c'est oui. Voir les exercices supplémentaires.

Définition 31. (Intégrable) *Une fonction* $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ *est dite* intégrable *si* $\int_{\mathbb{R}^d}|f|<+\infty$. $f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d,\lambda)$.

Définition 32. *Soit* $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ *une fonction intégrable. L'*integrale $\int_{\mathbb{R}^d}f$*:*

Une fonction réelle. $\int_{\mathbb{R}^d}f:=\int_{\mathbb{R}^d}f^+-\int_{\mathbb{R}^d}f^-$ *où les fonctions* $f^+=\max\{f,0\}$ *et* $f^-=\max\{-f,0\}$ *sont intégrables.*

Une fonction complexe. $\int_{\mathbb{R}^d}f:=\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Re}(f)+\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{Im}(f)$ *où les fonctions* $\mathrm{Re}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont intégrables.*

Proposition 33. (Linéarité) $f,g\in\mathcal{L}^1$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}\Rightarrow\lambda f+\mu g\in\mathcal{L}^1$ *et* $\int(\lambda f+\mu g)=\lambda\int f+\mu\int g$.

Proposition 34. (Inégalité triangulaire) $|\int f|\le\int|f|$.

Exercice. (Ch1 Ex1.10, Ex1.11(1)) Soit $f:\mathbb{R}^d\to[0,+\infty]$ mesurable. Montrer que

1. Pour tout $a\in\mathbb{R}_{>0}$, on a $\lambda(\{f>a\})\le a^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}f$.
2. Si $\int_{\mathbb{R}^d}f<+\infty$, alors f est finie p.p, c'est-à-dire, $\{f=+\infty\}$ est négligeable.
3. Si $\int_{\mathbb{R}^d}f=0$, alors $f=0$ p.p.

Solution.

1. $a\,1_{\{f>a\}}\le f$ alors $a\,\lambda(\{f>a\})\le\int f$.
2. Tout d'abord, $\{f=+\infty\}=\bigcap_{n=1}^\infty\{f>n\}$ est mesurable. Comme $\int_{\mathbb{R}^d}f<+\infty$, $\lambda(\{f>1\})<+\infty$. Alors $\lambda(\bigcap_{n=1}^\infty\{f>n\})=\lim_{n\to\infty}\lambda(\{f>n\})=\lim_{n\to\infty}n^{-1}\int_{\mathbb{R}^d}f=0$.
3. $\{f>0\}=\bigcup_{n=1}^\infty\{f>1/n\}$. Comme $\lambda(\{f>1/n\})=n\int_{\mathbb{R}^d}f=0$, on a $\{f>0\}$ est négligeable.

Exercice. (Ch1 Ex1.12) Soit $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ une fonction intégrable. Montrer la continuité de l'intégrale: pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ t.q. pour toute partie mésurable $A\subseteq\mathbb{R}^d$ avec $\lambda(A)<\delta$, on a $\int_A|f|:=\int_{\mathbb{R}^d}1_A|f|<\varepsilon$.

Solution. Tout d'abord, si la fonction f est borné, i.e. il existe $M > 0$ t.q. $|f| \leq M$, alors l'énoncé est vrai: on peut prendre $\delta = \varepsilon / M$, alors pour tout A avec $\lambda(A) < \delta$, on a $\int_A |f| \leq M \lambda(A) < \delta M = \varepsilon$.

En général, on a une suite croissante $(1_{\{|f| \leq M\}} |f|)_{M \in \mathbb{N}}$ avec $\lim_{M \to \infty} 1_{\{|f| \leq M\}} |f| = |f|$. Donc par Beppo-Levi, $\lim_{M \to +\infty} \int 1_{\{|f| \leq M\}} |f| = \int |f| < +\infty$, ce qui implique que $\lim_{M \to +\infty} \int (1 - 1_{\{|f| \leq M\}}) |f| = 0 \Longrightarrow \lim_{M \to +\infty} \int 1_{\{|f| > M\}} |f| = 0$. Donc il existe $M \in \mathbb{N}$ t.q. $\int 1_{\{|f| > M\}} |f| < \varepsilon / 2$.

On note que $f = 1_{\{|f| > M\}} |f| + 1_{\{|f| \leq M\}} |f|$ où $\int 1_{\{|f| > M\}} |f| < \varepsilon / 2$ et la fonction $1_{\{|f| \leq M\}} |f|$ est bornée. Alors par la première paragraphe, il existe $\delta > 0$ t.q. pour tout A avec $\lambda(A) < \delta$, on a $\int_A 1_{\{|f| > M\}} |f| < \varepsilon / 2$.

Donc $\int_A |f| = \int_A 1_{\{|f| > M\}} |f| + \int_A 1_{\{|f| \leq M\}} |f| < \varepsilon / 2 + \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{|f| \leq M\}} |f| < \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2 = \varepsilon$.

Remarque 35. Quand f est bornée (le cas « bon »), l'énoncé est relativement facile à montrer. Pour le cas général, on décompose f comme une somme de deux fonctions (mesurables) dont l'une est « bonne » et l'autre « partie mauvaise » est majorée.

Une généralisation (dehors de ce cours): lemme de Calderón-Zygmund.

3 Séance

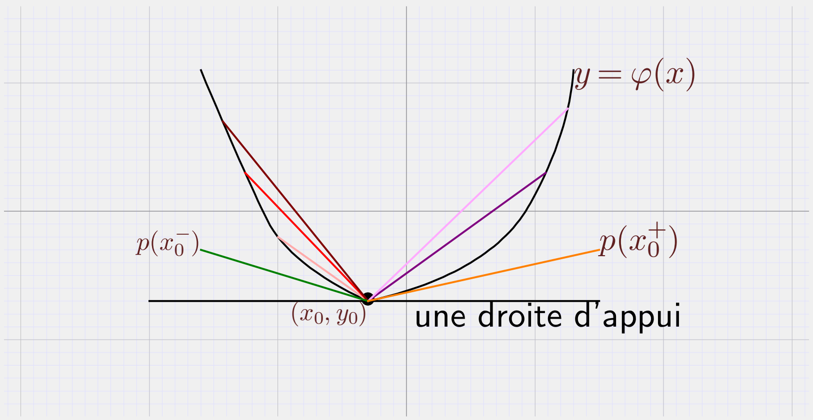
Exercice. (Ch1 Ex1.17) On dit qu'une fonction $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est *convexe* si pour tout $x,y\in\mathbb{R}$ et $\lambda\in[0,1]$, on a $\varphi(\lambda\,x+(1-\lambda)\,y)\le\lambda\,\varphi(x)+(1-\lambda)\,\varphi(y)$.

1. Montrer l'existence de *droites d'appui* pour les fonctions convexes: en tout point de leur graphe il existe une droite passant par ce point et ne dépassant jamais le graphe. [Indication: on peut supposer que $\varphi(0)=0$ et montrer que $\varphi(x)/x\le\varphi(y)/y$ si $x<0<y$]

2. Montrer que soit μ une mesure de probabilité à densité, alors $\varphi(\int_{\mathbb{R}^d} g\,\mathrm{d}\mu)\le\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(g)\,\mathrm{d}\mu$ pour tout $g\in L^1(\mu)$.

Solution.

1. Graphe de fonction convexe:



On fixe $(x_0,y_0=\varphi(x_0))$ sur le graphe de φ. Alors la fonction $p:\mathbb{R}\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ (pour tout x, $p(x)$ est la pente de la droite $(x,y:=\varphi(x))-(x_0,y_0)$) est croissante.

Lemme 36. *La fonction φ est convexe ssi pour tout $x_1<x_2<x_3$, on a*

$$\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1}\le\frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_1)}{x_3-x_1}\le\frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_2)}{x_3-x_2}$$

Par conséquent, on a $p(x_0^-):=\lim_{x\to x_0^-}p(x)\le\lim_{x\to x_0^+}p(x)=:p(x_0^+)$.

Lemme 37. *Une droite passant* (x_0, y_0) *est une droite d'appui ssi sa pente appartient à l'intervalle* $[p(x_0^-), p(x_0^+)]$*. Par exemple, si* φ *est differentiable à* x_0*, alors telle droite est unique.*

Exercice. (Ch1 Ex1.13) Soit $g:[a,b]\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ intégrable et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $\theta\in[a,b]$ t.q. $\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = f(\theta)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice. (Ch1 Ex1.15) Soit $f\in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0})$ une fonction continue intégrable.

1. Construire une fonction continue $f\in C^0(\mathbb{R}_{\geq 0})$ intégrable t.q. $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ n'existe pas.
2. Montrer que si f est uniformément continue alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.